UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
DEPARTAMENTUL DE TEHNOLOGII

ANALIZĂ MATEMATICĂ

Autor: MARIA PITICU

Universitatea din Bucureşti
Editura CREDIS
2008

Universitatea din Bucureşti
Editura CREDIS
Bd. Mihail Kogălniceanu, Nr. 36-46, Corp C, Etaj I, Sector 5
Tel: (021) 315 80 95; (021) 311 09 37, 031 405 79 40, 0723 27 33 47
Fax: (021) 315 80 96
Email: credis@credis.ro
Http://www.credis.ro

CAPITOLUL I

MULȚIMI ŞI STRUCTURI

1.1. Corpul numerelor complexe

Este cunoscut faptul că pe mulțimea numerelor reale, 3, se poate defini o structură algebrică cu ajutorul operațiilor de adunare şi înmulțire astfel încât să putem spune că tripletul $(3, +, \cdot)$ formează un corp comutativ.

Să considerăm mulțimea perechilor ordonate de două numere reale notată cu 3^2,

$3^2 = 3 \times 3 = \{(x, y) \mid x \in 3 \text{ şi } y \in 3\}$

pe care să definim operațiile de adunare şi înmulțire între două elemente ale acestei mulțimi în felul următor.

Pentru orice (x_1, y_1) şi $(x_2, y_2) \in 3^2$ avem

$$\begin{cases} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{cases} \tag{1.1}$$

Definiție:

Mulțimea 3^2 pe care am definit aceste operații conform relațiilor (1.1) o numim mulțimea numerelor complexe şi o notam cu $\forall$.

Elementele acestei mulțimi le vom nota fie ca perechi ordonate, fie cu o singură literă ca de exemplu
$z = (x, y) \in \forall$.

Se poate arăta că operațiile (1.1) conferă mulțimii $\forall$ o structură de corp comutativ notat prin tripletul $(\forall, +, \cdot)$. Se verifică cu uşurință că sunt îndeplinite următoarele proprietăți:

I) $(\forall, +)$ este grup abelian

1) pentru orice $z_1, z_2, z_3 \in \forall$ avem
   $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
2) pentru orice $z_1, z_2 \in \forall$ avem
   $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

3) există elementul e $\in$ ∀, numit <u>element neutru</u>, astfel încât pentru orice z $\in$ ∀ este îndeplinită relația
   z + e = e + z = z.
   Se arată că

$$\boxed{e = (0\,,\,0)} \tag{1.2}$$

4) pentru orice z $\in$ ∀, există elementul z' $\in$ ∀, numit simetricul lui z astfel încât
   z + z' = z' + z = e
   Se arată că dacă z = (x , y) atunci

$$\boxed{z' = (-x\,,\,-y)} \tag{1.3}$$

II) <u>(∀,•) are proprietățile</u>

1) pentru orice z_1, z_2, z_3 $\in$ ∀ avem
   $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1\, (z_2 z_3)$
2) pentru orice z_1, z_2 $\in$ ∀ avem
   $z_1 z_2 = z_2 z_1$
3) există un element e $\in$ ∀, numit <u>element neutru</u>, astfel încât pentru orice z $\in$ ∀ avem
   $z \cdot e = e \cdot z = z$.
   Se arată că

$$\boxed{e = (1\,,\,0)} \tag{1.4}$$

4) pentru orice z $\in$ ∀, are $z \neq (0,0)$ există un element z' $\in$ ∀ astfel încât
   $z \cdot z' = z' \cdot z = e$
   În acest caz, se arată că

$$\boxed{z' = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)} \tag{1.5}$$

III) <u>Distributivitatea înmulțirii față de adunare</u>

Astfel, pentru orice trei elemente z_1, z_2, z_3 $\in$ ∀ sunt îndeplinite relațiile:

$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

Fie o mulțime a mulțimii numerelor complexe, notată $∀_3 \subset ∀$

$$∀_3 = \{\, z \in ∀ \mid z = (x\,,\,0)\,,\, x \in 3 \,\} \tag{1.6}$$

Cu ușurință, putem observa că între mulțimile 3 și $∀_3$ se poate stabili o corespondență biunivocă care păstrează operațiile de adunare și înmulțire.

Astfel dacă:

$$\begin{cases} x \in ▥ \Leftrightarrow (x,0) \in ✂_{▥} □_{□} \\ y \in ▥ \Leftrightarrow (y,0) \in ✂_{▥} \end{cases}$$

atunci putem afirma că:

$x + y \in 3 \Leftrightarrow (x , 0) + (y , 0) = (x + y , 0) \in \forall_3$

$x\, y \in 3 \Leftrightarrow (x , 0) \cdot (y , 0) = (x\, y , 0) \in \forall_3$

Prin urmare, orice număr real $x \in 3$ poate fi privit ca număr complex de forma $(x , 0) \in \forall_3$

Putem face observația că pentru orice $\alpha \in 3$ şi orice $(x , y) \in \forall$ are loc relația

$$\boxed{\alpha (x , y) = (\alpha x , \alpha y)} \qquad (1.7)$$

deoarece: $\alpha (x , y) = (\alpha , 0) (x , y) = (\alpha x , \alpha y)$ conform operației de înmulțire definită în (1.1)

Având în vedere rezultatul (1.7), putem pune în evidență forma algebrică a numerelor complexe:

$z = (x , y) = (x , 0) + (0 , y) = x (1 , 0) + y (0 , 1) = x + i\, y$

dacă notăm $(1 , 0) = 1$ şi $(0 , 1) = i$

$$\boxed{z = x + i\, y} \qquad (1.8)$$

Putem folosi şi notațiile:

$$\begin{cases} x = \operatorname{Re} z \text{ (partea reală a lui z)} \\ y = \operatorname{Im} z \text{ (partea imaginară a lui z)} \end{cases}$$

Reamintim pentru numerele complexe $z = (x , y) = x + i\, y \in \forall$ următoarele noțiuni care sunt bine cunoscute:

- <u>conjugatul lui z</u> $\bar{z} = (x , -y) = x - i\, y$
- <u>modulul lui z</u> $| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$
- <u>argumentul lui z</u> ca fiind numărul real $\theta \in [-\pi , +\pi]$ unic determinat, definit de egalitatea:

$$\boxed{z = | z | (\cos \theta + i \sin \theta)} \qquad (1.9)$$

care reprezintă forma trigonometrică a numărului complex z.

Dacă avem în vedere formulele lui Euler,

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases} \tag{1.10}$$

din expresia (1.9) putem obține forma exponențială a numerelor complexe.

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\left[\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} + i\,\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right] = |z|\,e^{i\theta}$$

deci:

$$\boxed{z = |z|\,e^{i\theta}} \tag{1.11}$$

Pentru numerele complexe, se pot demonstra următoarele relații:

$|z| = 0 \iff z = 0$

$|z + w| \le |z| + |w|$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$|z| = |-z| = |\bar{z}|$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$|\operatorname{Re} z| \le |z|$ şi $|\operatorname{Im} z| \le |z|$

$|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

$||z| - |w|| \le |z| + |w|$

$z \cdot \bar{z} = 1$ dacă $|z| = 1$

$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$

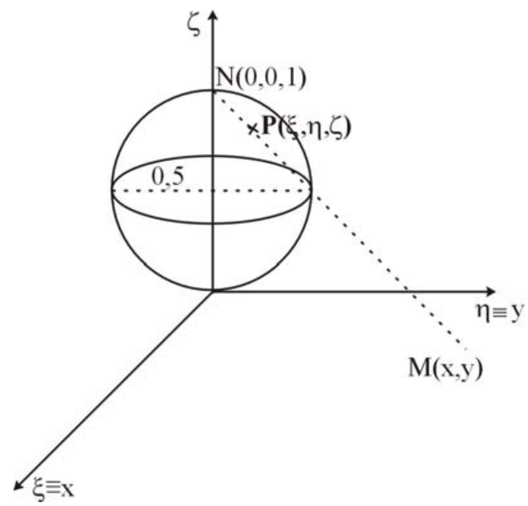
$$\prod_{j=1}^{n} z_j = \prod_{j=1}^{n} |z_j| [\cos\sum_{j=1}^{n}\theta_j + i\sin\sum_{j=1}^{n}\theta_j]$$

1.2. Punctul de la infinit în ∀

În 3^3 considerăm sistemul de axe (ξ , η , ζ) şi sfera de ecuaţie

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad (2.1)$$

cunoscută sub denumirea de sfera lui Riemann



Identificăm planul $(\xi O\eta)$ cu planul (xOy) în care orice număr complex $z = x + iy \in$ ∀ îl reprezentăm prin imaginea lui geometrică, adică prin punctul M(x, y). Acesta îl numim plan complex.

Vom încerca să stabilim o corespondenţă biunivocă între punctele acesei sfere şi punctele planului complex. Acest lucru se poate realiza prin proiecţie stereografică. Astfel, corespondentul punctului $P(\xi, \eta, \zeta)$ aparţinând sferei, este punctul M(x, y) obţinut prin intersecţia dreptei NP cu planul (xOy).

Geometric, se pot pune în evidenţă următoarele relaţii între coordonatele punctului $P(\xi, \eta, \zeta)$ şi coordonatele punctului M(x, y)

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}; \quad \eta = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}; \quad \zeta = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}; \\ x = \dfrac{\xi}{1-\zeta}; \quad y = \dfrac{\eta}{1-\zeta} \end{cases} \tag{2.2}$$

<u>Definiție</u>:

Punctul de la infinit în ∀ este corespondentul în planul complex al punctului N(0, 0, 1) prin proiecție stereografică. Putem face precizarea că este vorba de un punct fictiv, nefiind un număr complex definit prin cele două operații (adunare şi înmulțire).

Totuşi vom folosi operațiile:

$z + \infty = \infty \qquad (\forall)\ z \in \forall$

$z \cdot \infty = \infty \qquad (\forall)\ z \in \forall,\ z \neq 0$

$\dfrac{z}{\infty} = 0 \qquad (\forall)\ z \in \forall$

$\dfrac{z}{0} = \infty \qquad (\forall)\ z \in \forall,\ z \neq 0$

Vom nota cu ✂̃= $\forall \cup \{\infty\}$

<u>1.3. Structura de spațiu vectorial pe 3^n</u>

Notăm prin $\underbrace{▤^n = ▤ \times ▤ \times \ldots \times ▤□}_{n\ ori}$, mulțimea ale cărei elemente sunt grupuri ordonate de *n* numere reale.

$3^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in 3, x_2 \in 3, \ldots, x_n \in 3\}$

Mulțimea 3^n este un spațiu cu *n* dimensiuni, iar elementele sale se numesc *puncte*. Dacă $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ este un punct din 3^n, numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele* sau *proiecțiile pe axe* ale punctului *x*.

Pe spațiul 3^n vom defini următoarea structură algebrică.

I) *Adunarea,* operație efectuată cu ajutorul a două puncte din 3^n.

Dacă: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in 3^n$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in 3^n$

Atunci:

$$\boxed{x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n) \in 3^n} \qquad (3.1)$$

Se verifică că (3^n , +) este grup abelian

1) pentru orice x, y, z $\in 3^n$,
   $(x + y) + z = x + (y + z)$

2) pentru orice x, y $\in 3^n$,
   $x + y = y + x$

3) există e $\in 3^n$ astfel încât pentru orice n $\in 3^n$ avem
   $x + e = e + x = x$

Se obține
$\boxed{e = (0 , 0 ,\ldots, 0)}$

4) pentru orice $x = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \in 3^n$ există x' $\in 3^n$ astfel încât
   $x + x' = x' + x = e$

Se obține
$\boxed{x' = (-x_1 , -x_2 , \ldots, -x_n)}$

II) *Înmulțirea cu scalari*, adică un punct $x = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \in 3^n$ se înmulțeşte cu un număr $\alpha \in 3$ numit scalar, astfel

$$\boxed{\alpha x = (\alpha x_1 , \alpha x_2 , \ldots, \alpha x_n) \in 3^n} \qquad (3.2)$$

Această operație verifică următoarele proprietăți:

5) pentru orice $\alpha \in 3$ şi orice x, y $\in 3^n$,
$\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

6) pentru orice $\alpha, \beta \in 3$ şi orice x $\in 3^n$,
$(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

7) pentru orice $\alpha, \beta \in 3$ şi orice x $\in 3^n$
$(\alpha \beta) x = \alpha (\beta x)$

8) există un element $1 \in 3$ astfel încât pentru orice x $\in 3^n$ să avem
$1 \cdot x = x$

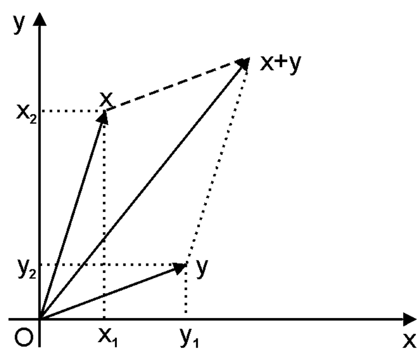
<u>Definiție</u>:

Mulțimea 3^n pe care s-au definit cele două operații cu proprietățile semnalate poartă denumirea de *spațiu vectorial real* sau spațiu vectorial peste corpul de scalari 3, notat 3^n /▥ .

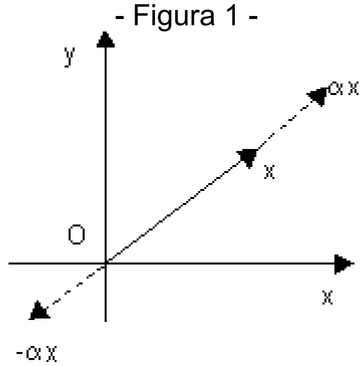
În acest spațiu vectorial, punctul $x = (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \in 3^n$ îl numim *vector*, iar numerele reale $x_1 , x_2 , \ldots, x_n$ le numim componentele vectorului x.

Pentru exemplificare, să arătăm la ce revine adunarea vectorilor şi înmulțirea vectorilor cu scalari în spațiul vectorial cu două dimensiuni 3^2 /▥ .

Dacă $x = (x_1 , x_2)$ şi $y = (y_1 , y_2)$ sunt două puncte din 3^2, punctul x + y este al patrulea vârf al paralelogramului cu celelalte trei vârfuri în O, x şi y (Fig. 1)



- Figura 1 -



- Figura 2 -

Dacă se identifică punctul x cu vectorul său de poziție $\vec{x}$, coordonatele x_1 şi x_2 ale punctului x sunt componentele vectorului $\vec{x}$

Prin urmare, adunarea punctelor din plan se face după regula paralelogramului, aşa cum este definită în fizică adunarea vectorilor.

Înmulțirea cu scalari, αx, revine la amplificarea lungimii vectorului $\vec{x}$ cu $|\alpha|$, păstrând sensul vectorului dacă $\alpha > 0$, sau schimbându-i sensul dacă $\alpha < 0$ (Fig. 2).

1.4. Produsul scalar pe 3^n

Definiție:

Pe spațiul vectorial $3^n/3$ spunem că am definit un *produs scalar*, dacă am determinat o aplicație

$< , > : 3^n \times 3^n \to <x , y> \in 3$,

aplicație care trebuie să îndeplinească condițiile:

1) $<\alpha x + \beta y , z> = \alpha <x , z> + \beta <y , z>$

$<x , \alpha y + \beta z> = \alpha <x , y> + \beta <x , z>$

pentru orice x, y, z $\in 3^n$ şi orice $\alpha, \beta \in 3$

2) $<x , y> = <y , x>$

pentru orice x, y $\in 3^n$

3) $<x , x> \geq 0$ pentru orice x $\in 3^n$

$<x , x> = 0 \Leftrightarrow x = (0 , 0 ,\dots, 0) \in 3^n$

Se verifică că în $3^n{}_{/\square}$ produsul scalar se poate defini astfel:

$x = (x_1 , x_2 , \dots, x_n) \in 3^n$

$y = (y_1 , y_2 , \dots, y_n) \in 3^n$

$$\boxed{<x , y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k} \qquad (4.1)$$

Definiție:

Se spune că doi vectori x şi y $\in 3^n$ sunt *ortogonali*, dacă $<x , y> = 0$.

De exemplu, vectorii din 3^n

$$\begin{cases} e_1 = (1, 0, ..., 0) \\ e_2 = (0, 1, ..., 0) \\ .... \\ e_n = (0, 0, ..., 1) \end{cases} \tag{4.2}$$

formează un sistem ortogonal de vectori în 3^n deoarece

$<e_i , e_j> = \begin{cases} 0, \text{pt. } i \neq j \\ 1, \text{pt. } i = j \end{cases}$

Introducerea produsului scalar atribuie mulțimii 3^n o structură suplimentară față de structura de spațiu vectorial obişnuit.

<u>Definiție</u>:

Spațiul vectorial 3^n / ≣ pe care s-a definit un produs scalar se numeşte *spațiu euclidian*.

În spațiul euclidian 3^n se demonstrază că pentru orice doi vectori nenuli x, y $\in 3^n$ are loc *inegalitatea Cauchy – Schwarz*,

$$\boxed{|< x, y >| \leq \sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}} \tag{4.3}$$

Prin explicitarea modulului în expresia (4.3) putem scrie:

$$\boxed{-1 \leq \frac{< x, y >}{\sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}} \leq 1} \tag{4.4}$$

<u>Definiție</u>:

Unghiul dintre vectorii x şi y **$\in 3^n$ este numărul $\varphi \in [0, \pi]$ unic determinat, dat de expresia**

$$\boxed{\cos \varphi = \frac{< x, y >}{\sqrt{< x, x >} \cdot \sqrt{< y, y >}}} \tag{4.5}$$

Evident pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, rezultă <x , y> = 0 condiție ce justifică definiția pe care am dat-o vectorilor ortogonali.

1.5. Norma pe $\mathbb{R}^n$

<u>Definiție</u>:

Pe spațiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ spunem că am definit *o normă*, dacă am determinat o aplicație

$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

care unui vector $x \in \mathbb{R}^n$ îi asociază numărul pozitiv $\| x \| \in \mathbb{R}^+$, aplicație care îndeplineşte condițiile:

1) $\| x \| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$

$\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$

2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \cdot \| x \|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi orice $\alpha \in \mathbb{R}$

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$

<u>Definiție</u>:

Spațiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ pe care s-a definit o normă se numeşte *spațiu normat*.

<u>Propoziție</u>:

În spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$, norma se poate introduce cu ajutorul produsului scalar, numită *normă euclidiană*, adică:

$$\| x \| = \sqrt{< x , x >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \qquad (5.1)$$

Demonstrația revine la a verifica proprietățile normei:

1) $\| x \| = \sqrt{< x , x >} \geq 0$ evident

$\| x \| = 0 \Rightarrow <x , x> = 0 \Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$ ▪

2) $\| \alpha x \| = \sqrt{< \alpha x, \alpha y >} = \sqrt{\alpha^2 < x, x >} = |\alpha| \sqrt{< x, x >} = | \alpha | \ \| x \|$

3) $\| x + y \|^2 = <x + y , x + y> = <x , x> + <x , y> + <y , x> <y , y> =$

$= \| x \|^2 + 2 <x , y> + \| y \|^2 \leq \| x \|^2 + 2 | <x , y> | + \| y \|^2 \leq$

$\leq \| x \|^2 + 2 \sqrt{< x , x >} \cdot \sqrt{< y , y >} + \| y \|^2 =$

$= \| x \|^2 + 2 \| x \| \cdot \| y \| + \| y \|^2 = (\| x \| + \| y \|)^2$

Observăm că am folosit în demonstrație inegalitatea Cauchy – Schwarz.

Având în vedere norma dată de (5.1) putem afirma că || x || reprezintă distanța de originea sistemului de axe din $\mathbb{R}^n$ la punctul $x \in \mathbb{R}^n$ (adică lungimea vectorului de poziție al punctului x).

Putem sublinia faptul că în spațiul vectorial $\mathbb{R}^n$, norma mai poate fi introdusă şi în alte moduri, ca de exemplu:

$$\| x \| = \max_{k=\overline{1,n}} |x_k|$$

$$\| x \| = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

$$\| x \| = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right]^{1/p}, \; p \in \mathbb{N}$$

1.6. Distanța în $\mathbb{R}^n$

Definiție:

Spunem că pe spațiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ am definit *o distanță* (*o metrică*), dacă am determinat o aplicație

d: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$

care face să corespundă unei perechi de puncte din $\mathbb{R}^n$, un număr pozitiv

$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to d(x, y) \in \mathbb{R}^+$

aplicație care îndeplineşte condițiile:

1) $d(x, y) \geq 0$ **pentru orice** $x, y \in \mathbb{R}^n$

$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$ **pentru orice** $x, y \in \mathbb{R}^n$

3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ **pentru orice** $x, y, z \in \mathbb{R}^n$

Cu uşurință se poate demonstra că în $\mathbb{R}^n$, metrica se poate introduce cu ajutorul normei, adică

$$\boxed{d(x, y) = \| x - y \|} \quad (\forall)\, x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (6.1)$$

De obicei noi vom folosi norma euclidiană.

Pentru două puncte $x = (x_1 , x_2) \in 3^2$ şi $y = (y_1 , y_2) \in 3^2$ vom avea:

$$d(x , y) = \| x-y \| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (6.2)$$

Pentru două puncte x şi $y \in 3$

$$d(x , y) = \| x-y \| = \sqrt{(x - y)^2} = | x – y | \qquad (6.3)$$

Definiţie:

Spaţiul vectorial □ⁿ/□ pe care s-a definit o metrică se numeşte *spaţiu metric.*

1.7. Exemple de spaţii vectoriale

Spaţiul □/□ - este spaţiul vectorial real al mulţimii numerelor reale. Cele două operaţii (adunare şi înmulţire cu scalar) revin la adunarea şi înmulţirea numerelor reale. În acest spaţiu, pentru orice $x, y \in 3$ putem spune că :

$$<x , y> = x\cdot y$$

$$\| x \| = | x | \qquad (7.1)$$

$$d(x , y) = | x - y |$$

$<x , y> = x\cdot y$

$\| x \| = | x |$

$d(x , y) = | x - y |$

Spaţiul □(3 , 3)/□

Mulţimea □(3 , 3) este mulţimea funcţiilor continue definite pe 3

□(3 , 3) = $\{f \mid f : 3 \to 3,\ f \in C^0 (3) \}$

Această mulţime poate fi organizată ca spaţiu vectorial, dacă cele două operaţii se definesc astfel:

$$\begin{cases} (f+g)(t) = f(t) + g(t) & (\forall)\ t \in 3 \\ (\alpha f)(t) = \alpha f(t) & (\forall)\ t \in 3 \end{cases} \qquad (7.2)$$

oricare ar fi funcțiile f, g $\in$ □(3 , 3) şi oricare ar fi scalarul $\alpha \in 3$

În acest spațiu vectorial, pentru orice f, g $\in$ □(3 , 3) putem defini:

$< f , g > = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$

$$\| f \| = \sqrt{< f , f >} = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, dt} \qquad \text{norma euclidiană} \qquad (7.3)$$

sau

$\| f \| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$

$d(f , g) = \| f - g \|$

Spațiul V^n $_{/}$

Definiție:

Numim *vector liber în 3^n* orice aplicație $\vec{v} : 3^n \to 3^n$ ce duce punctul $x = (x_1 , x_2 , \dots, x_n) \in 3^n$ în punctul $\vec{v}(x) = (x_1 + v_1 , x_2 + v_2, \dots, x_n + v_n) \in 3^n$ unde $v_1 , v_2 , \dots, v_n \in 3$ sunt numere date.

O astfel de aplicație o mai numim *translație* sau *deplasare*.

Vom nota $\vec{v} = [v_1 , v_2 , \dots, v_n]$

Definiție:

Mulțimea V^n, numită şi *mulțimea vectorilor liberi din 3^n* este mulțimea tuturor acestor aplicații, adică

$$V^n = \{ \vec{v} = [v_1 , v_2 , \dots, v_n] \mid \vec{v} : 3^n \to 3^n , v_k \in 3, k \in \overline{1,n} \}$$

Această mulțime poate fi organizată ca un spațiu vectorial real, dacă cele două operații se definesc la fel ca în 3^n.

Pentru orice $\vec{u} = [u_1 , u_2 , \dots, u_n]$ şi $\vec{v} = [v_1 , v_2 , \dots, v_n] \in V^n$ şi orice $\alpha \in 3$, avem:

$$\begin{aligned} &\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1 , u_2 + v_2 , \dots, u_n + v_n] \in V^n \\ &\alpha \vec{u} = [\alpha u_1 , \alpha u_2 , \dots, \alpha u_n] \in V^n \end{aligned} \qquad (7.4)$$

Asemănător, în spațiul vectorial V^n /▤ putem defini:

$$< \vec{u}\,, \vec{v} > = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$$

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{< \vec{u}\,, \vec{u} >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} \qquad (7.5)$$

$$d(\vec{u}\,, \vec{v}) = \| \vec{u} - \vec{v} \|$$

Spațiul ✂/✂

Mulțimea numerelor comlexe ∀ poate fi organizată ca un *spațiu vectorial complex* deoarece în acest caz, mulțimea scalarilor este ∀.

Cele două operații care se definesc sunt adunarea şi înmulțirea numerelor complexe.
Deoarece corpul de scalari este mulțimea numerelor complexe ∀, este necesar să subliniem că *produsul scalar îndeplineşte condițiile*

1) $<\alpha u + \beta z, w> = \alpha<u\,, w> + \beta<z\,, w>$
$<u\,, \alpha z + \beta w> = \bar{\alpha}<u\,, z> + \bar{\beta}<u\,, w>$
(∀) u, z, w ∈ ∀ şi (∀) α, β ∈ ∀

2) $<z\,, w> = \overline{<w\,,z>}$ (∀) z, w ∈ ∀
$<z\,, z> \geq 0$ (∀) z ∈ ∀)
$<z\,, z> = 0 \Leftrightarrow z = 0$✂ (7.6)

Astfel, în acest spațiu vectorial, pentru orice z, w ∈ ∀, avem:

$$<z\,, w> = z\,\bar{w}$$

$$\| z \| = \sqrt{<z\,,z>} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{|\,z\,|^2} = |\,z\,| \qquad (7.7)$$

$$d(z\,, w) = \| z - w \| = |\,z - w\,|$$

Spațiul ✂ⁿ/✂

Mulțimea $∀^n$ este mulțimea grupurilor de *n* numere complexe
$∀^n = \{ z = (z_1\,, z_2\,, \ldots, z_n) |\, z_k \in ∀,\ k = \overline{1,n} \}$

Această mulțime poate fi organizată ca spațiu vectorial complex, dacă cele două operații se introduc în felul următor.

Pentru orice $z = (z_1\ , z_2\ , \ldots, z_n)$ şi $w = (w_1\ , w_2\ , \ldots, w_n) \in \forall^n$ şi orice $\alpha \in \forall$ avem

$$\begin{cases} z + w = (z_1 + w_1\ , z_2 + w_2\ , \ldots, z_n + w_n)\ \forall^n \\ \alpha z = (\alpha z_1\ , \alpha z_2\ , \ldots, \alpha z_n) \in \forall^n \end{cases} \tag{7.8}$$

De asemenea, în acest spațiu vectorial putem defini:

$$\begin{aligned} &<z\ , w> = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k} \\ &\| z \| = \sqrt{< z\, , z >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | z_k |^2} \\ &d(z\ , w) = \| z - w \| \end{aligned} \tag{7.9}$$

$$<z\ , w> = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w_k}$$

$$\| z \| = \sqrt{< z\, , z >} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} | z_k |^2}$$

$$d(z\ , w) = \| z - w \|$$

1.8. Topologia în 3^n

Să considerăm intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset 3$

Definiție:

Prin *interval n-dimensional* înțelegem mulțimea $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, adică $I = \{ x = (x_1\ , x_2\ , \ldots, x_n) \in 3^n | x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n \}$

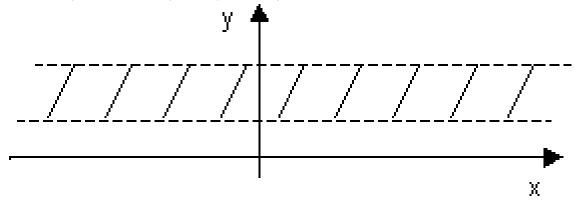
Intervalele I_1, I_2, …, I_n se numesc *laturile* intervalului n-dimensional. Acestea pot fi intervale închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

În 3^2, un interval bidimensional cu laturile mărginite este un dreptunghi.

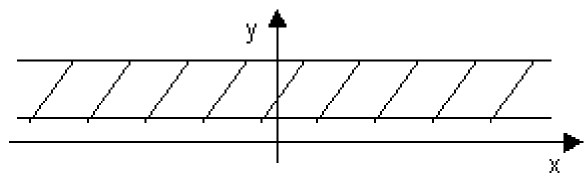
În 3^3, un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

Dacă toate intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sunt deschise (închise) atunci I este un interval n-dimensional deschis (închis).

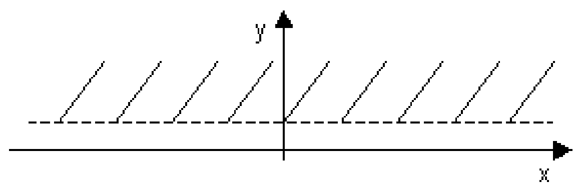
Mulțimea I = (-∞ , +∞) × (c , d) o numim *bandă deschisă*



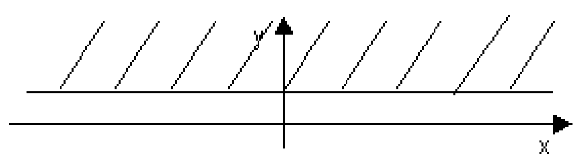
Mulțimea I = (-∞ , +∞) × [c , d] o numim *bandă închisă*



Mulțimea I = (-∞ , +∞) × (c , +∞) o numim *semiplan deschis*



Mulțimea I = (-∞ , +∞) × [c , +∞) o numim *semiplan închis*

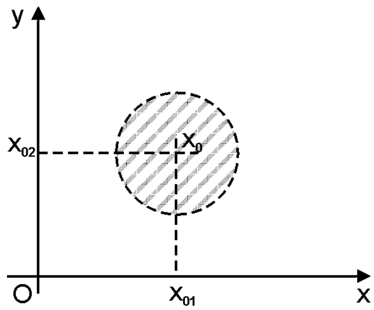


Să considerăm un punct $x_0 \in 3^n$ şi $r \in 3^+$

<u>Definiție</u>:

Numim *sferă deschisă* cu centrul în punctul $x_0 \in 3^n$ şi de rază r, mulțimea U (x_0 , r) = $\{x \in 3^n \mid \| x - x_0 \| < r\}$

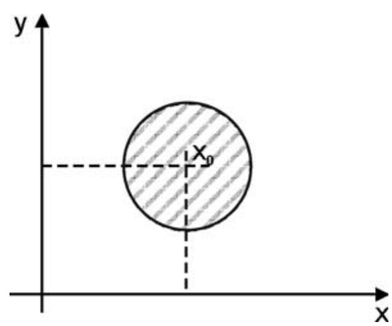
Folosind norma euclidiană, în 3^2, această mulțime este un disc cu centrul în $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in 3^2$ de rază r, fără punctele de pe circumferință



Definiție:

Numim *sferă închisă* cu centrul în punctul $x_0 \in 3^n$ şi de rază r, mulțimea $\overline{U(x_0, r)}$ = $\{x \in 3^n \mid \| x - x_0 \| \le r\}$

În 3^2 această mulțime este discul cu centrul în $x_0 \in 3^2$ şi de rază r împreună cu punctele de pe circumferință.



Definiție:

Numim *sferă propriuzisă* cu centrul în punctul $x_0 \in 3^n$ şi de rază r, mulțimea $S(x_0, r) = \{x \in 3^n \mid \| x - x_0 \| = r\}$

În 3^2, această mulțime este circumferința cercului.

Definiție:

Numim *vecinătate* a unui punct $x_0 \in 3^n$ ($V(x_0)$) orice mulțime care conține o sferă deschisă $U(x_0, r)$, adică

$x_0 \in U(x_0, r) \subset V(x_0)$

Evident, orice sferă deschisă cu centrul în x_0, $U(x_0, r)$, este o vecinătate a lui x_0.

În 3, o vecinătate a lui $x_0 \in 3$ poate fi orice interval deschis (a , b) care conține acest punct, $x_0 \in$ (a , b). În particular, se poate lua un interval centrat în x_0 de forma $(x_0 - \varepsilon , x_0 + \varepsilon)$.

<u>Definiție</u>:

Mulțimea $E \subset 3^n$ o numim *deschisă* dacă pentru orice $x \in E$, există o sferă deschisă U (x , r) astfel încât $x \in U(x , r) \subset E$.

<u>Definiție</u>:

Complementara unei mulțimi descise o numim mulțime *închisă*.

<u>Definiție</u>:

Punctul $x \in E \subset 3^n$ îl numim *punct interior* acestei mulțimi dacă există o vecinătate a lui, V(x) astfel încât $x \in V(x) \subset E$.

Mulțimea punctelor interioare mulțimii E o notăm cu $\mathring{E}$ şi se numeşte *interiorul lui E*. Evident $\mathring{E} \subset E$.

Se demonstrează că mulțimea $E \subset 3^n$ este deschisă $\Leftrightarrow E = \mathring{E}$.

Ca şi în cazul mulțimilor deschise din 3, se demonstrează pentru mulțimile deschise din 3^n următoarele:
1) Reuniunea unei familii oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.
2) Intersecția unei familii finite de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

<u>Definiție</u>:

Punctul $x \in 3^n$ este *punct aderent* mulțimii $E \subset 3^n$ dacă orice vecinătate a sa, V(x) conține cel puțin un punct din E, $V(x) \cap E \neq \Phi$.

Mulțimea punctelor aderente mulțimii $E \subset 3^n$ o notăm cu $\overline{E}$ şi o numim *aderența lui E* sau *închiderea lui E.*

Se demonstrează că mulțimea $E \subset 3^n$ este închisă $\Leftrightarrow E = \overline{E}$.

De asemenea, în cazul mulțimilor închise din 3^n, se demonstrează următoarele proprietăți:
1) Reuniumea unei familii finite de mulțimi închise este o mulțime închisă.

2) Intersecția unei familii oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Definiție:

Punctul x $\in 3^n$ este *punct frontieră* mulțimii E, dacă pentru orice vecinătate a lui, V(x), avem $V(x) \cap E \neq \Phi$ şi $V(x) \cap C_E \neq \Phi$.

Vom nota prin ∂ E mulțimea tuturor punctelor frontieră mulțimii E numită *frontiera lui E*.

Se arată că:
$E \subset 3^n$ este închisă $\Leftrightarrow$ E conține toate punctele frontieră
$E \subset 3^n$ este deschisă $\Leftrightarrow$ E nu conține nici un punct frontieră

Definiție:

Punctul x $\in 3^n$ este *punct de acumulare* al mulțimii E, dacă orice vecinătate a lui, V(x), conține cel puțin un punct din E diferit de x, adică:

$V(x) \cap (E \backslash \{x\}) \neq \Phi$.

Mulțimea punctelor de acumulare mulțimii E o notăm E'.

Evident E' $\subseteq \bar{E}$ şi putem afirma că o mulțime este închisă dacă şi numai dacă îşi conține toate punctele de acumulare.

Definiție:

Punctul x $\in E \subset 3^n$ se numeşte *punct izolat* dacă există o vecinătate V(x) astfel încât $V(x) \cap E = \{x\}$.

Definiție:

Mulțimea E $\subset 3^n$ care are numai puncte izolate o numim *mulțime discretă.*

Definiție:

Mulțimea E $\subset 3^n$ este *mărginită* dacă există r >0 astfel încât pentru orice x $\in$ E să avem $\| x \| \leq r$. Aceasta înseamnă că ($\exists$) o sferă de rază r centrată în origine care conține întreaga mulțime E.

Definiție:

Mulțimea E $\subset 3^n$ închisă şi mărginită o numim *mulțime compactă.*

Intervalele n-dimensionale închise, precum şi sferele închise sunt mulțimi compacte.

<u>Definiție</u>:

Mulțimea E $\subset 3^n$ este *conexă* dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise G_1, $G_2 \subset$ E astfel încât:

$$\begin{cases} A \subset G_1 \cup G_2 \quad A \cap G_1 \quad A \cap G_2 \neq \Phi \\ (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \Phi \end{cases}$$

În limbajul obişnuit, a spune că mulțimea E este conexă revine la a spune că “este formată dintr-o singură bucată”.

<u>Definiție</u>:

Mulțimea E $\subset 3^n$ deschisă şi conexă se numeşte *domeniu.*

Intervalele n-dimensionale deschise, precum şi sferele deschise sunt domenii din 3^n.

CAPITOLUL II

ŞIRURI

2.1. Şiruri în ∀

Definiţie:

Numim *şir de numere complexe* o aplicaţie f : $\angle \to \forall$ care asociază numărului k $\in \angle$, numărul complex f(k) $\overset{\text{(not)}}{=}$ $z_k \in \forall$.

Ca şi în cazul şirurilor de numere reale, şirul în mulţimea ∀ îl notăm $(z_k)_{k\in\angle}$, z_k fiind termenul general al şirului.

Definiţie:

Şirul de numere complexe $(z_k)_{k\in\angle}$ este *mărginit* dacă există un r > 0 astfel încât pentru orice k $\in \angle$ avem $|\,z_k\,| \le r$.

Având în vedere interpretarea geometrică a modulului unui număr complex, această relaţie ne spune că toţi termenii şirului sunt conţinuţi în discul centrat în origine având raza r.

Definiţie:

Numărul $z_0\in\forall$ este limita şirului $(z_k)_{k\in\angle}$ ($\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$) dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang N_ε astfel încât pentr orice $k>N_\varepsilon$ să avem

$|z_k - z_0| < \varepsilon$.

Această condiţie ne spune că de la un anumit rang, toţi termenii şirului aparţin unui disc centrat în z_0 de rază ε oricât de mică.

Şirurile de numere complexe care au limită se numesc *şiruri convergente*. În caz contrar, ele se numesc *şiruri divergentăe.*

Pentru studiul unui şir de numere complexe vom considera cele două şiruri de numere reale $(\mathrm{Re}\, z_k)_{k\in\angle}$ şi $(\mathrm{Im}\, z_k)_{k\in\angle}$ corespunzuătoare părţilor reale şi imaginare.

<u>Propoziția 1</u>:

$$(z_k)_{k\in\angle} \text{ mărginit} \Leftrightarrow \begin{cases} (\operatorname{Re} z_k)_{k\in N} \text{ marginit} \\ (\operatorname{Im} z_k)_{k\in N} \text{ marginit} \end{cases}$$

<u>Demonstrație</u>:

"$\Rightarrow$" $(z_k)_{k\in\angle}$ mărginit $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ $(\exists)$ $r > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k \in \angle$ avem $|z_k| \leq r$

Din $\begin{cases} |\operatorname{Re} z_k| \leq |z_k| \leq r \quad (\forall) k \in N \\ |\operatorname{Im} z_k| \leq |z_k| \leq r \quad (\forall) k \in N \end{cases}$ rezultă că şirurile $(\operatorname{Re} z_k)_{k\in\angle}$ şi $(\operatorname{Im} z_k)_{k\in\angle}$ sunt mărginite.

"$\Leftarrow$" $\begin{cases} (\operatorname{Re} z_k)_{k\in N} \text{ marginit} \Rightarrow |\operatorname{Re} z_k| \leq r_1 \quad (\forall) k \in N \\ (\operatorname{Im} z_k)_{k\in N} \text{ marginit} \Rightarrow |\operatorname{Im} z_k| \leq r_2 \quad (\forall) k \in N \end{cases}$

Folosim inegalitatea:

$|z_k| \leq |\operatorname{Re} z_k| + |\operatorname{Im} z_k| \leq r_1 + r_2 = r$ $(\forall)$ $k \in \angle$ de unde rezultă că şirul $(z_k)_{k\in\angle}$ este mărginit.

<u>Propoziția 2</u>:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k = \operatorname{Im} z_0 \end{cases}$$

<u>Demonstrație</u>:

"$\Rightarrow$" $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$ $\overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ N_ε a.î. pentru $(\forall)$ $k > N_\varepsilon$ avem $|z_k - z_0| < \varepsilon$

Folosim inegalitățile:

$|\operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_0| = |\operatorname{Re}(z_k - z_0)| \leq |z_k - z_0| < \varepsilon$ $(\forall)$ $k > N_\varepsilon$

$|\operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_0| = |\operatorname{Im}(z_k - z_0)| \leq |z_k - z_0| < \varepsilon$ $(\forall)$ $k > N_\varepsilon$

de unde conform definiției, putem scie

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_0$$

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k = \operatorname{Im} z_0$$

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Re} z_k = \operatorname{Re} z_0 \overset{(def)}{\Leftrightarrow} (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{1\varepsilon}$ a.î. pentru $(\forall)$ $k > N_{1\varepsilon}$ avem $|\operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Im} z_k = \operatorname{Im} z_0 \overset{(def)}{\Leftrightarrow} (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{2\varepsilon}$ a. î. pentru $(\forall)$ $k > N_{2\varepsilon}$ avem $|\operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$

Folosim inegalitatea
$| z_k - z_0 | \leq | \operatorname{Re} (z_k - z_0) | + | \operatorname{Im} (z_k - z_0) | =$
$=| \operatorname{Re} z_k - \operatorname{Re} z_0) | + | \operatorname{Im} z_k - \operatorname{Im} z_0) | <$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ pentru $(\forall)$ $k > N_\varepsilon$, unde $N_\varepsilon = \max \{ N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \}$
Prin urmare, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0$

Este bine de reținut că studiul unui şir de numere complexe îl facem cu ajutorul celor două şiruri de numere reale ataşate.

2.2. Şiruri în 3^n

Definiție:

Numim *şir de vectori din 3^n* o aplicație f : $\angle \to 3^n$ ce asociază unui număr natural k $\in \angle$ vectorul:

$f(k) \overset{(not)}{=} x_k \in 3^n$

$x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) \in 3^n$

Pentru simplitate, un şir din 3^n îl vom nota $(x_k)_{k\in\angle}$ unde x_k este termenul general al şirului.

Putem face observația că unui şir $(x_k)_{k\in\angle}$ de vectori din 3^n îi putem asocia n şiruri de numere reale, $(x_{ki})_{k\in\angle}$, $i=\overline{1,n}$ numite *şirurile componentelor vectorilor x_k.*

Definiție:

Şirul de vectori din 3^n, $(x_k)_{k\in\angle}$ este *mărginit* dacă există un r > 0 astfel încât pentru orice k $\in \angle$ să avem $\| x_k \| \leq r$.

<u>Definiție</u>:

Vectorul $x_0 \in 3^n$ este limita şirului $(x_k)_{k\in\angle}$ ($\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang N_ε astfel încât pentru orice $k > N_\varepsilon$ să avem $\| x_k - x_0 \| < \varepsilon$

Un astfel de şir îl numim *convergent*.

Ca şi în cazul şirurilor de numere complexe, în cazul şirurilor din 3^n se pot demonstra două propoziții asemănătoare care ne punctează modul în care se studiază aceste şiruri.

<u>Propoziția 1</u>:

Şirul $(x_k)_{k\in\angle}$, $x_k \in 3^n$ este mărginit $\Leftrightarrow$ şirurile $(x_{ki})_{k\in\angle}$,$x_{ki} \in 3$, i = $\overline{1,n}$ sunt mărginite

<u>Propoziția 2</u>:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{k\to\infty} x_{ki} = x_{0i}$, i = $\overline{1,n}$

Demonstrațiile se pot face apelând la inegalitățile

$| \alpha_i |$ = $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \le \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i|$, $\alpha_i \in 3$

<u>2.3. Proprietăți ale şirurilor convergente din 3^n</u>

1) Fie $(x_k)_{k\in\angle}$, $x_k \in 3^n$

Dacă şirul $(x_k)_{k\in\angle}$ este convergent atunci limita sa este unică.

<u>Demonstrație</u>:

Vom presupune că şirul admite două limite x_0 şi $x_0^* \in 3^n$

Din $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N_{1\varepsilon}$ a.î.

pentru $(\forall)$ $k > N_{1\varepsilon}$ avem $\| x_k - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$ (3.1)

Din $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0^* \overset{(def)}{\Leftrightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{2\varepsilon}$ a.î.

pentru $(\forall)$ k $> N_{2\varepsilon}$ avem $\|\ x_k - x_0^*\ \| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (3.2)

Notăm cu $N_\varepsilon = \max\{ N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon} \}$ şi calculăm

$\|x_0 - x_0^*\| = \|x_0 - x_k + x_k - x_0^*\| \le \|x_0 - x_k\| + \|x_k - x_0^*\| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Deducem că $x_0 = x_0^*$.

2) Fie $(x_k)_{k\in\angle}$, $x_k \in 3^n$, $x_0 \in 3^n$ şi $(\alpha_k)_{k\in\angle}$ $\alpha_k \in 3^+$ Dacă 1) $\|x_k - x_0\| \le \alpha_k$ $(\forall)$ k $\in \angle$ 2) $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$ Atunci $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

<u>Demonstraţie</u>:

Din $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_\varepsilon$ a.î. pentru $(\forall)$ k $> N_\varepsilon$ avem $\alpha_k < \varepsilon$ (3.3)

Calculăm $\|\ x_k - x_0\ \| \le \alpha_k < \varepsilon\ (\forall)$ k $> N_\varepsilon \overset{(def)}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

3) Fie $(x_k)_{k\in\angle}$, $x_k \in 3^n$ $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\| = \|x_0\|$

<u>Demonstraţie</u>:

Din $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_\varepsilon$ a.î. pentru $(\forall)$ k $> N_\varepsilon$ avem $\|\ x_k - x_0\ \| < \varepsilon$ (3.4)

Folosind o inegalitate a normei, avem
$|\ \|x_k\| - \|x_0\|\ | \le \|\ x_k - x_0\ \| < \varepsilon\ (\forall)$ k $> N_\varepsilon$

de unde deducem că $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\| = \|x_0\|$

4) Fie $(x_k)_{k\in\angle}$, $x_k \in 3^n$
$(x_k)_{k\in\angle}$ convergent $\Rightarrow$ $(x_k)_{k\in\angle}$ mărginit

<u>Demonstrație</u>:

Din $(x_k)_{k\in\angle}$ convergent $\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ cu $x_0 \in 3^n \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}\|x_k\| = \|x_0\|$. Este cunoscut faptul că un şir convergent de numere reale este mărginit, deci există $r > 0$ astfel încât $\| x_k \| \leq r$ pentru orice $k \in \angle$. Deci conform definiției şirul $(x_k)_{k\in\angle}$ este mărginit.

5) Orice subşir al unui şir convergent din 3^n este convergent şi are aceeaşi limită.

6) Dacă într-un şir convergent din 3^n scoatem sau adăugăm un mumăr finit de termeni, obținem tot un şir convergent şi cu aceeaşi limită.

Subliniem faptul că proprietățile şirurilor convergente din 3^n sunt valabile şi pentru şirurile convergente de numere complexe.

<u>2.4. Operații cu şiruri convergente din 3^n</u>

1) Fie două şiruri $(x_k)_{k\in\angle}$ şi $(y_k)_{k\in\angle}$, cu $x_k, y_k \in 3^n$ şi $x_0, y_0 \in 3^n$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x_0 + y_0$$

<u>Demonstrație</u>:

$$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow} \text{pentru } (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{1\varepsilon} \text{ a.î. pentru } (\forall)\ k > N_{1\varepsilon} \text{ avem } \| x_k - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

$$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0 \overset{(def)}{\Rightarrow} \text{pentru } (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{2\varepsilon} \text{ a.î. pentru } (\forall)\ k > N_{2\varepsilon} \text{ avem } \| y_k - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2}$$

Calculăm

$\| (x_k + y_k) - (x_0 + y_0) \| \leq \| x_k - x_0 \| + \| y_k - y_0 \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

pentru $(\forall)$ $k > N_\varepsilon = \max \{ N_{1\varepsilon} , N_{2\varepsilon} \}$

Rezultă $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k + y_k) = x_0 + y_0$

> **2)** Fie $(x_k)_{k\in\angle}$ cu $x_k \in 3^n$, $x_0 \in 3^n$ şi $(\alpha_k)_{k\in\angle}$ cu $\alpha_k \in 3$, $\alpha_0 \in 3$
>
> $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(\alpha_k x_k) = \alpha_0 x_0$$

<u>Demonstrație</u>:

$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N_{1\varepsilon}$ a.î. pentru

$(\forall)$ $k > N_{1\varepsilon}$ avem $| \alpha_k - \alpha_0 | < \frac{\varepsilon}{2\|x_0\|}$ (4.3)

$\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha_0$, $(\alpha_k)_{k\in\angle}$ mărginit $\Rightarrow$ $(\exists)$ $M>0$ a. î. pentru

$(\forall)$ $k \in \angle$ avem $| \alpha_k | \leq M$ (4.4)

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N_{2\varepsilon}$ a.î. pentru

$(\forall)$ $k > N_{2\varepsilon}$ avem $\| x_k - x_0 \| < \frac{\varepsilon}{2M}$ (4.5)

Folosind aceste trei inegalități calculăm

$\| \alpha_k x_k - \alpha_0 x_0 \| = \| \alpha_k x_k - \alpha_k x_0 + \alpha_k x_0 - \alpha_0 x_0 \| \leq$

$\leq \| \alpha_k x_k - \alpha_k x_0 \| + \| \alpha_k x_0 - \alpha_0 x_0 \| =$

$= | \alpha_k | \cdot \| x_k - x_0 \| + \| x_0 \| \cdot | \alpha_k - \alpha_o | < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \| x_0 \| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|x_0\|} = \varepsilon$

pentru orice $k > N_\varepsilon = \max \{ N_{1\varepsilon} , N_{2\varepsilon} \}$

Prin urmare, $\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_k x_k) = \alpha_0 x_0$

> **3)** Fie $(x_k)_{k\in\angle}$ cu $x_k \in 3^n$, $x_0 \in 3^n$
> $(y_k)_{k\in\angle}$ cu $y_k \in 3^n$, $y_0 \in 3^n$
> $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0\\ \lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} < x_k , y_k > = < x_0 , y_0 >$$

Demonstrație:

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{1\varepsilon}$ a.î. pentru $(\forall)\ k > N_{1\varepsilon}$ să avem:

$$\begin{cases}\|x_k - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{3\|y_0\|}\\ \quad \text{si}\\ \|x_k - x_0\| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}\end{cases} \tag{4.6}$$

$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{2\varepsilon}$ a.î. pentru $(\forall)\ k > N_{2\varepsilon}$

$$\begin{cases}\|y_k - y_0\| < \dfrac{\varepsilon}{3\|x_0\|}\\ \quad \text{si}\\ \|y_k - y_0\| < \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{3}}\end{cases} \tag{4.7}$$

Având în vedere inegalitea Cauchy-Schwarz, calculăm

$$| <x_k , y_k> - <x_0 , y_0> | =$$

$$= | <x_k - x_0 , y_0> + <x_0 , y_k - y_0> + <x_k - x_0 , y_k - y_0> | \le$$

$$\le | <x_k - x_0 , y_0> | + | <x_0 , y_k - y_0> | + | <x_k - x_0 , y_k - y_0> | \le$$

$$\le \| x_k - x_0 \| \cdot \| y_0 \| + \| x_0 \| \cdot \| y_k - y_0 \| + \| x_k - x_0 \| \cdot \| y_k - y_0 \| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3\|y_0\|} \cdot \| y_0 \| + \| x_0 \| \cdot \frac{\varepsilon}{3\|x_0\|} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} = \varepsilon$$

pentru orice $k > N_\varepsilon = \max \{ N_{1\varepsilon} , N_{2\varepsilon} \}$

Prin urmare, $\lim\limits_{k\to\infty} < x_k , y_k > = < x_0 , y_0 >$

Aceste proprietăți sunt valabile şi pentru şirurile de numere complexe. În plus, pentru aceste şiruri mai putem sublinia următoarele:
Fie $(z_k)_{k\in\angle}$, $z_k \in \forall$, $z_0 \in \forall$

$(w_k)_{k\in\angle}$, $w_k \in \forall$, $w_0 \in \forall$

a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \neq \infty \\ \lim\limits_{k\to\infty} w_k = w_0 \neq \infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(z_k\ w_k) = z_0\ w_0$$

b) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \neq \infty \\ \lim\limits_{k\to\infty} w_k = w_0 \neq 0 \\ \qquad\quad w_k \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(\frac{z_k}{w_k}\right) = \frac{z_0}{w_0}$$

c) $$\lim_{k\to\infty} z_k = z_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \bar{z}_k = \bar{z}_0$$

d) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0 \\ (\omega_k)_{k\in N} \text{ marginit}\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}(z_k \omega_k) = 0$$

e) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \\ \arg z_0 \neq \pi\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty} |z_k| = |z_0| \\ \lim\limits_{k\to\infty}(\arg z_k) = \arg z_0\end{cases}$$

Definiție:

Şirul de numere complexe $(z_k)_{k\in N}$ are limita ∞ ($\lim\limits_{k\to\infty} z_k = \infty$), dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există N_ε **astfel încât pentru orice** $k>N_\varepsilon$, avem $|z_k| \geq \varepsilon$.

2.5. Şiruri Cauchy

Fie un şir $(x_k)_{k\in N}$ cu $x_k \in 3^n$.

Definiție:

Şirul $(x_k)_{k\in N}$ este un şir Cauchy (şir fundamental) dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang N_ε astfel încât pentru orice două numere naturale p, q$>N_\varepsilon$ să avem

$$\| x_p - x_q \| < \varepsilon \tag{5.1}$$

Prin urmare, termenii unui astfel de şir au proprietatea că de la un anumit rang, distanța dintre doi termeni ai şirului poate fi făcută oricât de mică.

Observăm că putem exprima şi în alt mod condiția (5.1.), adică: pentru orice $k>N_\varepsilon$ şi $p\in N$, $p\geq 1$, avem

$$\|x_{k+p}-x_k\|<\varepsilon \tag{5.2.}$$

Se poate demonstra că mulțimea tuturor şirurilor Cauchy din 3^n formează un spațiu vectorial real dacă cele două operații se introduc în felul următor:

$$\begin{cases}(x_k)_{k\in N}+(y_k)_{k\in N}=(x_k+y_k)_{k\in N}\\ \alpha(x_k)_{k\in N}=(\alpha x_k)_{k\in N}\end{cases} \tag{5.3.}$$

<u>Propoziția</u> 1:

Fie şirul $(x_k)_{k\in N}$ cu $x_k\in 3^n$.

Dacă $(x_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy $\Rightarrow$ şirul $(x_k)_{k\in N}$ este mărginit.

<u>Demonstrație:</u>

Din $(x_k)_{k\in N}$ şir Cauchy rezultă, conform definiției, că pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang N_ε astfel încât pentru orice două numere naturale $p,q>N_\varepsilon$ să avem $\|x_p-x_q\|<\varepsilon$.

Calculăm $\|x_p\|=\|x_p-x_q+x_q\|\leq\|x_p-x_q\|+\|x_q\|<\varepsilon+\mu$
unde am notat prin $\mu=\max\|x_i\|$, $i=\overline{1,q}$ deci conform definiției, şirul $(x_k)_{k\in N}$ este mărginit.

<u>Propoziția 2:</u>

Fie şirul $(x_k)_{k\in N}$ cu $x_k\in 3^n$, $(x_{km})_{k\in N}$ un subşir al său şi $x_0\in 3^n$.

Dacă:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ (x_k)_{k\in N}\text{ sir Cauchy}\\ 2)\ \lim\limits_{km\to\infty}x_{km}=x_0\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{k\to\infty}x_k=x_0$$

<u>Demonstrație:</u>

Din $(x_k)_{k\in N}$ şir Cauchy rezultă conform definiției că pentru orice $\varepsilon>0$ există un rang $N_{1\varepsilon}$ astfel încât pentru orice două numere naturale $p,q>N_{1\varepsilon}$ să avem $\|x_p-x_q\|<\varepsilon/2$. (5.4.)

Din $\lim\limits_{km\to\infty} x_{km} = x_0 \xrightarrow{(def)}$ pentru $(\forall)\,\varepsilon > 0, (\exists)\, N_{2\varepsilon}$ astfel incat pentru $(\forall)\, k_m > N_{2\varepsilon}$ avem

$$\|x_{km} - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5.5.}$$

Notăm $N_\varepsilon = \max\{N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon}\}$
Conform inegalităților (5.4) şi (5.5) putem scrie că pentru orice k şi $k_m > N_\varepsilon$ avem:

$$\begin{cases} \|x_k - x_{km}\| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \|x_{km} - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{5.6.}$$

Prin urmare:

$\|x_k - x_0\| \le \|x_k - x_{km}\| + \|x_{km} - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ şi putem scrie că $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$

<u>Criteriul lui Cauchy</u>

> Fie şirul $(x_k)_{k\in N}$, $x_k \in 3^n$.
> $(x_k)_{k\in N}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $(x_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy.

<u>Demonstrație:</u>

"$\Rightarrow$" Din $(x_k)_{k\in N}$ convergent rezultă, conform definiției, că există $x_o \in 3^n$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon>0$ există N_ε astfel încât oricare $k>N_\varepsilon$ avem
$\|x_k - x_0\| < \varepsilon/2$ (5.7.)

Pentru oricare $p,q > N_\varepsilon$ putem scrie

$$\begin{cases} \|x_p - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \|x_q - x_0\| < \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \tag{5.8.}$$

Calculăm: $\|x_p - x_q\| \le \|x_p - x_0\| + \|x_0 - x_q\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;(\forall)\, p,q \in N_\varepsilon$

Prin urmare şirul $(x_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy

"$\Leftarrow$" Din $(x_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy rezultă conform propoziției 1 $(x_k)_{k\in N}$ este mărginit. Conform lemei lui Césaro, din orice şir mărginit din 3^n se poate extrage un subşir convergent, $(x_{km})_{km\in N}$.

Dacă $\lim\limits_{km\to\infty} x_{km} = x_0 \overset{\text{(propoz 2)}}{\Rightarrow} \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$ deci sirul $(x_k)_{k\in N}$ este convergent

<u>Observații</u>:--

– Un spațiu metric în care fiecare şir Cauchy este convergent se numeşte <u>spațiu</u> <u>complet.</u>
– Un spațiu normat complet se numeşte <u>spațiu</u> <u>Banach</u>. Rezultă că spațiul normat 3^n este spațiu Banach.
– Un spațiu Banach în care norma se introduce cu ajutorul produsului scalar, se numeşte <u>spațiu Hilbert</u>. Un spațiu Hilbert cu n dimensiuni se numeşte <u>spațiu</u> <u>euclidian</u> <u>n-dimensional</u>.

Rezultă că spațiul Banach 3^n cu norma $\| x \| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ este un spațiu Hilbert cu n dimensiuni, adică un spațiu euclidian n-dimensional.

– 3^n este de asemenea spațiu Banach pentru norma $\|x\|_1 = \sum |x_k|$ şi $\|x\|_2 = \sup |x_k|$, $k=\overline{1,n}$

<u>2.6. Exerciții rezolvate</u>

1) Să se arate că şirul de numere complexe $(z_k)_{k\in N}$ cu $z_k = \frac{1}{k}\left(1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \ldots + e^{ki\theta}\right)$ este mărginit

Apelând la formula cunoscută

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{6.1.}$$

vom încerca să separăm partea reală de cea imaginară în expresia lui z_k

$$Z_k = \frac{1}{k}\left[1 + (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos 2\theta + i\sin 2\theta) + \ldots + (\cos k\theta + i\sin k\theta)\right] =$$

$$= \frac{1}{k}(1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos k\theta) + i\frac{1}{k}(\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin k\theta)$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} Z_k = \frac{1}{k}(1+\cos\theta+\ldots+\cos k\theta) \\ \operatorname{Im} Z_k = \frac{1}{k}(\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin k\theta) \end{cases} \quad (6.2.)$$

Este suficient sa verificam mărginirea şirurilor de numere reale $(\operatorname{Re}Z_k)_{k\in N}$ si $(\operatorname{Im} Z_k)_{k\in N}$

$$|\operatorname{Re} Z_k| = \frac{1}{k}|1+\cos\theta+\ldots+\cos k\theta| \le \frac{1}{k}(1+|\cos\theta|+\ldots+|\cos k\theta|) \le \frac{1+k}{k} \le 2$$

$$|\operatorname{Im} Z_k| = \frac{1}{k}|\sin\theta+\ldots+\sin k\theta| \le \frac{1}{k}(|\sin\theta|+\ldots+|\sin k\theta|) \le \frac{k}{k} = 1, \forall k \in N^*$$

Prin urmare, conform definiției, aceste şiruri sunt mărginite.

2) Să se arate că şirul de vectori din 3^3, $(x_k)_{k\in N}$, $x_k=(X_{1k}, X_{2k}, x_{3k})$ cu

$$x_{1k} = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$$

$$x_{2k} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}$$

$$x_{3k} = \cos a\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^k}$$

este mărginit.

Este suficientă verificarea mărginirii celor trei şiruri de numere reale.

$$0 < x_{1k} = \frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k} \le k\cdot\frac{1}{k+1} < 1, \forall k \in N^*$$

$$0 < x_{2k} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} =$$

$$= 1-\frac{1}{k+1} < 1, \forall k \in N^*$$

$$|x_{3k}| = \left|\cos a\cdot\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2^2}\ldots\cos\frac{a}{2^k}\right| = |\cos a|\cdot\left|\cos\frac{a}{2}\right|\ldots\left|\cos\frac{a}{2^k}\right| \le 1, \forall k \in N^*$$

3) Să se calculeze limita şirului de vectori din 3^3, $(x_k)_{k\in N}$, $x_k=(X_{1k}, X_{2k}, x_{3k})$

$$x_{1k} = \sqrt[k]{\frac{3^{3k}(k!)^3}{(2k)!}}$$

$$x_{2k} = \frac{C_k^1}{2^k+1} + \frac{C_k^2}{2^k+2} + \ldots + \frac{C_k^k}{2^k+k}$$

$$x_{3k} = \left(\frac{k^2+k+1}{k\ \ +1}\right)^{\frac{k^2+k+1}{k+1}}$$

Vom calcula separat limitele celor trei şiruri de numere reale.
Pentru primul şir folosim criteriul radicalului.

$$\lim_{k\to\infty} x_{1k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{3^{3k}(k!)^3}{(3k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{3k+3}[(k+1)!]^3}{(3k+3)!} * \frac{(3k)!}{3^{3k}(k!)^3}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{3^3(k+1)^3}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)} = 1$$

Pentru al doilea şir folosim regula cleştelui având în vedere că putem scrie inegalitățile

$$\frac{C_k^1 + C_k^2 + \ldots + C_k^k}{2^k+k} \le x_{2k} \le \frac{C_k^1 + C_k^2 + \ldots C_k^k}{2^k+1} \Rightarrow \frac{2^k-1}{2^k+k} \le x_{2k} \le \frac{2^k-1}{2^k+1}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k-1}{2^k+k} = 1 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k-1}{2^k+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{2k} = 1$$

$$\lim_{k\to\infty} x_{3k} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k^2+k+1}{k^2+1}\right)^{\frac{k^2+k+1}{k+1}} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{k}{k^2+1}\right)^{\frac{k^2+k+1}{k+1}} = e^{\lim\limits_{k\to\infty}\frac{k^2+k+1}{k+1}*\frac{k}{k^2+1}} = e$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = (1,1,e) \in \mathbb{R}^3$$

4) Să se studieze natura şirului de vectori din R^3, $(x_k)_{k \in N}$, $x_k=(X_{1k}, X_{2k}, x_{3k})$ unde

$$x_{1k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{\sin n\theta}{2^n}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$x_{2k} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2}$$

$$x_{3k} = \frac{1}{\sqrt[p]{1+k^p}} + \frac{1}{\sqrt[p]{2+k^p}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{k+k^p}}, p \in N$$

- Pentru primele două, vom arăta că sunt şiruri Cauchy de numere reale.

$$\left|x_{1,k+p} - x_{1,k}\right| = \left|\frac{\sin(k+1)\theta}{2^{k+1}} + \frac{\sin(k+2)\theta}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{\sin(k+p)\theta}{2^{k+p}}\right| \le \left|\frac{\sin(k+1)\theta}{2^{k+1}}\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\frac{\sin(k+p)\theta}{2^{k+p}}\right| \le \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+p}} \le \frac{p}{2^{k+1}} \to 0, \text{ când } k \to \infty$$

$$\left|x_{2,k+p} - x_{2k}\right| = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(k+p)^2} \le \frac{p}{(k+1)^2} \to 0, \text{ când } k \to \infty$$

- Pentru ultimul şir calculam limita folosind regula cleştelui

$$\frac{k}{\sqrt[p]{k+k^p}} \le x_{3k} \le \frac{k}{\sqrt[p]{1+k^p}}$$

Cum

$$\begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\sqrt[p]{k+k^p}} = 1 \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{\sqrt[p]{1+k^p}} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_{3k} = 1$$

Rezultă că şirul $(x_k)_{k \in N}$ de vectori din $\mathbb{R}^3$ este convergent.

5) Să se arate că şirul de numere reale $(x_k)_{k \in N}$ cu

$x_k = \sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ este convergent şi are ca limită numărul e.

Pentru convergență, este suficient sa arătăm că este şir Cauchy.

$$|x_{k+p} - x_k| = \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+2)!} + \ldots + \frac{1}{(k+p)!} \le \frac{p}{(k+1)!} \to 0, k \to \infty$$

- Pentru calculul limitei, vom folosi limita numărului e,

$\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e$ şi notăm

$$S_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k = 1 + C_k^1 * \frac{1}{k} + C_k^2 * \frac{1}{k^2} + \ldots + C_k^k * \frac{1}{k^k} =$$

$$= 1 + k\cdot\frac{1}{k} + \frac{k(k-1)}{2!}\cdot\frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots[k-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{1}{k^k} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{k}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)}{k!} \le$$

$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!} = \sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!} = x_k$$

Prin urmare $S_k \le x_k \quad (\forall)\ k\in\mathbf{N}$

Prin trecere la limită avem $\lim\limits_{k\to\infty} S_k \le \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, prin urmare

$$\boxed{e \le \lim_{k\to\infty} x_k} \qquad (6.3.)$$

Fie un număr natural n<k şi notăm

$$S_k^n = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{k}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)}{3!} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{n!}$$

Evident avem $S_k^n < S_k$ astfel încât prin trecere la limită obținem

$\lim\limits_{k\to\infty} S_k^n \le \lim\limits_{k\to\infty} S_k$; $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \le e$

$x_n \le e$ de unde

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x_n \le e} \qquad (6.4.)$$

Din (6.3) şi (6.4) obținem

$$\lim_{k\to\infty} x_k = e \qquad (6.5.)$$

CAPITOLUL III

SERII

3.1. Serii în 3^n

Fie şirul $(x_k)_{k\in N}$ cu $x_k \in 3^n$. Deoarece perechea $(3^n, +)$ este un grup, putem spune că suma finită $x_1+x_2+\ldots+x_k \in 3^n$, $(\forall)$ $k\in N$.

Dacă ne propunem să determinăm "suma infinită"

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots \overset{(not)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad (1.1.)$$

vom constata că " valoarea" sa nu este totdeauna un vector din 3^n. Mai mult, nu ştim ce este "valoarea" acestei sume infinite.

Vom nota prin

$$s_k=x_1+x_2+\ldots+x_k \quad (\forall)\ k\in N \qquad (1.2.)$$

şi în continuare vom lua în consideraţie şirul de vectori din 3^n, $(s_k)_{k\in \mathbf{N}}$

Definiţie:

Prin *serie* în spaţiul vectorial normat 3^n înţelegem un cuplu de şiruri $((x_k)_{k\in N}, (s_k)_{k\in N})$, unde vectorul x_k se numeşte *termenul general* al seriei, iar vectorul s_k se numeşte *suma parţială de ordinul k* a seriei. Seria o notăm simplu,

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ sau } \sum x_k \qquad \mathbf{(1.3)}$$

Definiţie:

Seria Σx_k se numeşte *serie convergentă* dacă $(\exists)$ un vector $s\in R^n$ astfel incât şirul $(s_k)_{k\in N}$ să fie convergent către s.

În acest caz, vectorul $s\in 3^n$ se numeşte *suma seriei* (1.3.) şi se fololeşte notaţia:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \mathbf{(1.4)}$$

Definiție:

O serie care nu este convergentă se numeşte *serie divergentă.*

Observație:--

Prin analogie putem introduce noțiunea de serie în R sau în ∀.

Definiție:

Seria de vectori din 3^n , Σx_k, este *absolut convergentă* dacă seria normelor, $\Sigma\|x_k\|$, este convergentă .

Definiție:

Seria de vectori din 3^n , Σx_k, este *semiconvergentă* dacă ea este convergentă dar nu şi absolut convergentă.

Propoziție:

O serie din 3^n absolut convergentă este şi convergentă.

Demonstrație:

Fie seria Σx_k, $x_k\in 3^n$. Din Σx_k absolut convergentă rezultă, conform definiției $\Sigma\|x_k\|$convergentă $\Rightarrow$ (def) şirul sumelor parțiale $(\sigma_k)_{k\in N}$ cu $\sigma_k=\|x_1\|+\ldots+\|x_k\|$ este convergent $\Rightarrow$ $(\sigma_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy $\Rightarrow$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon>0$ $(\exists)$ N_ε astfel încât pentru $(\forall)$ $k>N_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $p\geq 1$ $(p\in N)$ avem $\|\sigma_{k+p} -\sigma_k\|<\varepsilon$, adică

$$\|x_{k+1}\|+\|x_{k+2}\|+\ldots+\|x_{k+p}\|<\varepsilon \qquad (1.5.)$$

Pentru seria Σx_k , notăm $(s_k)_{k\in N}$ şirul sumelor parțiale şi calculăm: $\|s_{k+p} -s_k\|= \|x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{k+p}\|\leq \|x_{k+1}\|+\|x_{k+2}\|+\ldots\|x_{k+p}\|<\varepsilon$ $(\forall)k>N_\varepsilon$ şi $(\forall)$ $p\geq 1$ $(p\in N)$ $\Rightarrow$ $(s_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy în 3^n $\Rightarrow$ $(s_k)_{k\in N}$ este convergent $\Rightarrow$ seria Σx_k este convergentă.

Observații:--

1. În R^n nu orice serie convergentă este şi absolut convergentă.
2. Seriile din 3 sau ∀ sunt absolut convergente dacă seriile modulelor sunt convergente.
3. Dacă Σx_k este o serie din 3^n absolut convergentă, atunci are loc inegalitatea:
   $\|\Sigma x_k\| \leq \Sigma \|x_k\|$ (1.6.)
4. Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor, se obține tot o serie absolut convergentă şi cu aceaşi sumă.
5. Unei serii de vectori din 3^n, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ unde $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}) \in$ ▤■ îi putem asocia <u>n</u> serii de numere reale, $\sum_{k=1}^{\infty} x_{ki}, i = \overline{1,n}$, numite <u>seriile componentelor vectorilor x_k.</u>

<u>3.2. Criterii de convergență pentru seriile din 3^n</u>

Criteriul general al lui Cauchy

Fie Σx_k , $x_k \in 3^n$. Σx_k convergentă $\Leftrightarrow$ pentru (∀) ε>0 (∃) N_ε astfel incât pentru (∀) $k>N_\varepsilon$ şi (∀) $p \geq 1$ ($p \in N$) avem $\|x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{k+p}\|<\varepsilon$

<u>Demonstrație:</u>

Vom folosi criteriul lui Cauchy pentru un şir din 3^n
Σx_k convergentă $\Rightarrow$(def) $(s_k)_{k\in N}$ este convergent $\Leftrightarrow$ $(s_k)_{k\in N}$ este şir Cauchy $\Rightarrow$(def) pentru (∀) ε>0 (∃) N_ε astfel incât pentru (∀)$k>N_\varepsilon$ şi (∀)$p\geq 1$ ($p\in N$) avem $\|s_{k+p} - s_k\|<\varepsilon$, adică $\|x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_{k+p}\|<\varepsilon$.

Criteriul lul Abel

Fie seria Σx_k , $x_k \in 3^n$ şi $(s_k)_{k\in N}$ şirul sumelor parțiale.
Fie şirul $(\alpha_k)_{k\in N}$, $\alpha_k \in 3^+$.
Dacă: $(s_k)_{k\in N}$ este mărginit şi $(\alpha_k)_{k\in N}$ este descrescător, convergent spre $0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \Sigma \alpha_k x_k$ este convergentă.

Demonstrație:

Din $(s_k)_{k\in N}$ mărginit $\Rightarrow$ $(\exists)$ M>0 astfel încât $\|s_k\| \le M$, $(\forall)$ $k\in N$

Din $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0 \Rightarrow$ pt. $(\forall)\, \varepsilon > 0\, (\exists)\ N_\varepsilon$ a.i. pt. $(\forall)\ k > N_\varepsilon$, avem $\alpha_k < \dfrac{\varepsilon}{2M}$

Vom arăta că seria $\Sigma\alpha_k x_k$ verifică criteriul lui Cauchy.
Observăm mai întâi că: $x_{k+1}=s_{k+1}-s_k$ $(\forall)$ $k\in N$
$|\alpha_p-\alpha_{p+1}|=\alpha_p-\alpha_{p+1}>0$ $(\forall)$ $p\in N$ şi calculăm

$\|\alpha_{k+1}x_{k+1}+\alpha_{k+2}x_{k+2}+\ldots+\alpha_{k+p}x_{k+p}+\|=$
$=\|\alpha_{k+1}(s_{k+1}-s_k)+ \alpha_{k+2}(s_{k+2}-s_{k+1})+\ldots +\alpha_{k+p}(s_{k+p}-s_{k+p-1})\|=$
$=\|-\alpha_{k+1}s_k+(\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2})s_{k+1}+\ldots+(\alpha_{k+p-1}-\alpha_{k+p})s_{k+p-1}+\alpha_{k+p}s_{k+p}\|\le$
$\le\alpha_{k+1}\|s_k\|+(\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2})\|s_{k+1}\|+\ldots+(\alpha_{k+p-1}-\alpha_{k+p})\|s_{k+p-1}\|+\alpha_{k+p}\|s_{k+p}\|\le$
$\le M\,[\alpha_{k+1}+(\alpha_{k+1}-\alpha_{k+2})+\ldots+(\alpha_{k+p-1}-\alpha_{k+p})+ \alpha_{k+p}]=$
$=2M\cdot\alpha_{k+1}<2M\cdot\varepsilon/2M=\varepsilon$ $(\forall)$ $k>N_\varepsilon$, $(p)\ge 1$ $\Rightarrow$ seria $\Sigma\alpha_k x_k$ este convergentă.

Trebuie să subliniem că pentru o serie ne interesează rezolvarea a două probleme. Pe de o parte stabilirea naturii seriei care se face folosind un criteriu şi pe de altă parte, calculul sume seriei.

3.3. Proprietăți ale seriilor din 3^v convergente

1) Fie Σx_k, $x_k\in 3^n$, daca Σx_k convergentă, atunci şirul $(x_k)_{k\in N}$ al termenilor seriei converge către vectorul $0\in R^n$.

Demonstrație:

Notăm $(s_k)_{k\in N}$ şirul sumelor parțiale.
Dacă Σx_k convergentă$\Rightarrow$ $(s_k)_{k\in N}$ este convergent $\Rightarrow$ $(\exists)$ $s\in 3^n$ astfel încât:
$\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$
Deoarece $x_k = s_k - s_{k-1}$, $(\forall)\ k > 2$
$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \lim\limits_{k\to\infty}(s_k - s_{k-1}) = s - s = 0$

2) Dacă şirul termenilor seriei nu este convergent către 0, atunci seria este divergentă.

Observație:--

Există serii pentru care şirul termenilor converge către 0 fără ca seria să fi convergentă.

Exemplu: --
Să considerăm seria de numere pozitive numită *serie armonică*.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{3.1.}$$

Pentru această serie, şirul termenilor

$$(x_k)_{k \in N} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k \in N} \to 0$$

dar $\left|s_{2k} - s_k\right| = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{2k} \geq k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \quad (\forall) k \in N$

deci nu este satisfăcută condiția din criteriul general al lui Cauchy.

Fie seria Σx_k , $x_k \in \mathbb{R}^n$. Din această serie scoatem primii p termeni şi reținem seria

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} x_k \overset{(not)}{=} r_p$$

pe care o numim *restul de ordin p al seriei*.

3) Resturile unei serii convergente formează un şir convergent către 0.

Demonstrație:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ convergenta} \Rightarrow (\exists)\, s \in \mathbb{R}^n \text{ astfel incat } \lim_{k \to \infty} s_k = s$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + ... + x_p + \sum_{k=p+1}^{\infty} x_k \tag{3.2.}$$

Mai putem scrie

$s=s_p+r_p$ (3.3.)

de unde $\lim\limits_{p\to\infty} r_p = \lim\limits_{p\to\infty}(s-s_p) = s-s=0$

4) Dacă într-o serie convergentă schimbăm ordinea unui număr finit de termeni obținem tot o serie convergentă şi cu aceeaşi sumă. Acelaşi rezultat pentru cazul unei serii divergente.

5) Dacă la o serie convergentă adăugăm sau înlăturăm un număr finit de termeni obținem tot o serie convergentă dar, în general, cu altă sumă.

Pentru o serie divergentă se obține un rezultat asemănător.

6) Seria de vectori din $\mathbb{R}^n$ este convergentă dacă şi numai dacă cele n serii de numere reale corespunzătoare componentelor sunt convergente.

<u>Demonstrație:</u> pentru simplitate, facem demonstrația numai pentru cazul unei serii de numere complexe.

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ convergentă} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_k \text{ convergentă} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_k \text{ convergentă} \end{array} \right.$$

$$\text{Notăm} \quad \left| \begin{array}{l} s_k = z_1 + z_2 + \ldots + z_k \\ \eta_k = \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 + \ldots + \operatorname{Re} z_k \\ I_k = \operatorname{Im} z_1 + \operatorname{Im} z_2 + \ldots + \operatorname{Im} z_k \end{array} \right. \qquad (3.4)$$

Observăm că între sumele parțiale corespunzătoare celor trei serii putem scrie relația:

$$s_k = \eta_k + iI_k \qquad (3.5)$$

Prin trecerea la limită în (3.5) putem demonstra ambele implicații:

7) Fie seriile $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}^n$ şi $s, \sigma \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = s$ (convergenta) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sigma$ (convergenta)	$\Rightarrow$	$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) = s + \sigma$ (convergentă) $\sum_{k=1}^{\infty} (ax_k) = \alpha s$ (convergentă)

Demonstrație:

Notăm:
$$\left|\begin{array}{l} s_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \\ \sigma_k = y_1 + y_2 + \ldots + y_k \end{array}\right. \quad (3.6)$$

$\eta_k = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_K + y_K)$

$I_k = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \ldots + \alpha x_K$

Între aceste sume parțiale putem scrie:
$$\left|\begin{array}{l} \eta_k = s_k + \sigma_k \\ I_k = \alpha s_k \end{array}\right. \quad (3.7)$$

Prin trecere la limită, se verifică rezultatele menționate.

3.4. Serii alternate

Se numeşte serie alteranată o serie de numere reale de forma:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot x_k} \text{ unde } x_k \in \mathbb{R}^+ \quad (4.1)$$

Criteriul lui Leibniz

O serie alternată pentru care şirul modulelor termenilor, $(x_k)_{k\in N}$ este descrescător şi convergent către zero, este convergentă.

Demonstrație :
Vom folosi criteriul lui Abel de convergență pentru serii verificând cele două condiții:

*) pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, evident şirul $(s_k)_{k\in\mathbf{N}}$ al sumelor parțiale este mărginit deoarece:

$$s_k = -1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{pt} \quad k = \text{par} \\ 1 & \text{pt} \quad k = \text{impar} \end{cases}$$

$s_k \le 1 \ (\forall)\ k \in N$

**)Şirul $(x_k)_{k\in N} \searrow 0$

Prin urmare seria $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ este convergentă.

Exemplu: ---
Seria armonică alternată

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k} \tag{4.2}$$

este convergentă conform acestui criteriu.

Deoarece seria modulelor $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ este divergentă, putem spune că seria armonică alternată este o serie semiconvergentă.

3.5. Serii cu termeni pozitivi

O serie cu termeni pozitivi $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ cu $x_k \in \mathbb{R}^+$, are proprietatea că şirul sumelor parţiale, $(s_k)_{k\in N}$ este un şir crescător.

Dacă şirul $(s_k)_{k\in N}$ este mărginit superior, atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ este convergentă. În caz contrar, seria este divergentă.

Un exemplu de serie cu termeni pozitivi este seria geometrică:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}q^k\ ,\ q>0} \tag{5.1}$$

Pentru această serie, suma parţială s_k este:

$s_k = 1+q+q^2+...+q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, pt. $q \neq 0$.

Cum $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pt} \quad q\in(0,1) \\ \infty & \text{pt} \quad q>1 \end{cases}$, iar pentru $q=1$ seria devine 1+1+1+ … , deci este divergentă, putem reţine următoarele rezultate:

Seria $\sum_{k=0}^{\infty}q^k$ este $\Big\{$ convergentă pt $q\in(0,1)$ (5.2)

divergentă pentru $q \geq 1$

În continuare, vom da câteva criterii de convergență pentru aceste serii.

1. Primul criteriu de comparație:

Fie seriile $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$, $x_k, y_k \in \mathbb{R}^+$ şi $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Dacă $x_k \leq \alpha y_k$ $(\forall)$, $k \in N$, atunci:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ convergentă $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergentă $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ divergentă

<u>Demonstrație</u>:

Notăm: $\left| \begin{array}{l} s_k = x_1 + x_2 + ... + x_k \\ \sigma_k = y_1 + y_2 + ... + y_k \end{array} \right.$

Evident avem:

$$s_k \leq \alpha \sigma_k \ (\forall) \ k \in N \tag{5.3}$$

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ convergentă $\Rightarrow$ $(\sigma_k)_{k \in N}$ convergent $\Rightarrow$ $(\sigma_k)_{k \in N}$ mărginit superior $\Rightarrow$ $\sigma_k \leq M$ $(\forall)$ $k \in N$ $\overset{(5.3)}{\Rightarrow}$ $s_k \leq \alpha \cdot M$ $(\forall)$ $k \in N$ $\Rightarrow$ $(s_k)_{k \in N}$ mărginit superior $\Rightarrow$ $(s_k)_{k \in N}$ convergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergentă $\Rightarrow$ $(s_k)_{k \in N}$ divergent $\Rightarrow$ $(s_k)_{k \in N}$ nemărginit superior $\overset{(5.3)}{\Longrightarrow}$ $(\sigma_k)_{k \in N}$ nemărginit $\Rightarrow$ $(\sigma_k)_{k \in N}$ divergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ divergentă.

<u>Exemple:</u> ---

a) Seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ este convergentă deoarece $\frac{(k!)^2}{(2k)!} \leq \frac{1}{2^k}$ pentru $k \geq 1$ şi comparația se face cu seria geometrică

b) Seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ este divergentă, deoarece $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{1}{k+1}$ şi comparația se face cu seria armonică.

----

2. Al doilea criteriu de comparație

Dacă: $\frac{x_{k+1}}{x_k} \le \frac{y_{k+1}}{y_k}$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$

Atunci:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ convergentă $\Rightarrow$ $\sum x_k$ convergentă

b) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ divergentă $\Rightarrow$ $\sum y_k$ divergentă

<u>Demonstrație</u>:

Din $\frac{x_{k+1}}{x_k} \le \frac{y_{k+1}}{y_k}$ $\Rightarrow$ $\frac{x_k}{y_k} \ge \frac{x_{k+1}}{y_{k+1}}$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\frac{x_1}{y_1} \ge \frac{x_2}{y_2} \ge \ldots \ge \frac{x_k}{y_k} \ge \ldots$

Dacă notăm $\alpha = \frac{x_1}{y_1}$, atunci $x_k \le \alpha y_k$ $(\forall)$ $k \in \mathbf{N}$ şi suntem în condițiile crietriului anterior.

3. Criteriul de condensare al lui Cauchy

Fie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ $x_k \in \mathbb{R}^+$

Dacă şirul $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ al termenilor serie este descrescător, atunci seriile $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ şi $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2k}$ au aceeaşi natură.

<u>Demonstrație</u>:

*) Presupunem că seria $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2k}$ este convergentă. Vom grupa termenii seriei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ în felul următor:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \ldots$$
$$+ \left(x_{2^k} + x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}\right) + \ldots$$

Fiecare grup conține 2^k termeni $(k \geq 0)$

Notăm $y_k = x_{2^k} + x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}$ (5.4) şi considerăm seria $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$ numită seria cu termeni grupați.

Evident, natura seriei $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ o putem preciza folosind seria $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$

Deoarece $y_k = x_{2^k} + x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}-1} \leq 2^k x_{2^k}$

$$y_{k \leq 2^k x_{2^k}} \quad (\forall)\ k \in \mathbf{N} \tag{5.5}$$

putem folosi primul criteriu al comparației. Din $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ convergentă

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} y_k$ convergentă $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă.

**) Presupunem seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă şi vom forma seria cu termenii grupați $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ astfel încât termenul y_{k-1} să fie

$$y_{k-1} = x_{2^{k-1}+1} + x_{2^{k-1}+2} + x_{2^{k-1}+3} + \ldots + x_{2^k} \geq \underbrace{x_{2^k} + x_{2^k} + x_{2^k} + \ldots + x_{2^k}}_{2^{k-1}\text{termeni}} =$$

$$= 2^{k-1} \cdot x_{2^k} = \frac{1}{2} 2^k x_{2^k}$$

$$y_{k-1} \geq \frac{1}{2} \cdot 2^k x_{2^k} \quad (\forall) \quad k \in \mathbf{N} \tag{5.6}$$

Folosind criteriul comparației şi relația (5.6) obținem: $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} y_k$ convergentă $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ convergentă.

Exemplu: --

Seria armonică generalizată

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}} \tag{5.7}$$

care este convergentă pentru $\alpha > 1$.

În cazul de față, seria $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x_{2^k}$ este $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k(\alpha-1)}}$ care este o serie geometrică cu rația subunitară pentru $\alpha > 1$.

----

4. Criteriul rădăcinii al lui Cauchy

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, cu $x_k \in \mathbb{R}^+$

a) Dacă există un număr natural $\mathbf{N_1}$ astfel încât pentru orice $k \geq \mathbf{N_1}$ să avem $\sqrt[k]{x_k} \leq q \ (q \in (0,1))$ atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă.

b) Dacă există un număr natural $\mathbf{N_2}$ astfel încât pentru orice $k \geq \mathbf{N_2}$ să avem $\sqrt[k]{x_k} \geq 1$ atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nu este divergentă.

Demonstrație:

a) Din $\sqrt[k]{x_k} \leq q \ (\forall) \ k \geq \mathbf{N_1} \Rightarrow x_k \leq q^k \ (\forall) \ k \geq x$. Cum $q \in (0,1)$, seria $\sum_{k \geq \mathbf{N_1}} q^{\mathbf{k}}$ este convergentă. Conform criteriului comparației, seria $\sum_{k \geq \mathbf{N_1}} x^k$ este convergentă $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă.

b) Din $\sqrt[k]{x_k} \geq 1 \ k \geq \mathbf{N_2} \Rightarrow x_k \geq 1 \ (\forall) \ k \geq \mathbf{N_2} \Rightarrow (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este divergentă.

Corolar

Dacă $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = l \le \infty$, atunci:

a) dacă $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă

b) dacă $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergentă

Observație:---

Dacă $l = 1$, nu putem trage nici o concluzie asupra seriei.

Exemple: ---

a) seria $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$ este convergentă deoarece $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{\ln k} = 0 < 1$

b) seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(5k)^k}{\sqrt{(16k^2+k+1)^k}}$ este divergentă deoarece

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{x_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{5k}{\sqrt{16k^2+k+1}} = \frac{5}{4} > 1$$

----

5. Criteriul raportului d'Alembert

Fie seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$, $x_k \in \mathbb{R}^+$

a) Dacă există un număr natural $\mathbf{N_1}$ astfel încât pentru orice $k \ge \mathbf{N_1}$ să avem $\frac{x_{k+1}}{x_k} \le q$ $(0 < q < 1)$ atunci seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă.

b) Dacă există un număr natural $\mathbf{N_2}$ astfel încât pentru orice $k \ge \mathbf{N_2}$ să avem $\frac{x_{k+1}}{x_k} \ge 1$, atunci seria este divergentă

Demonstrație:

a) Din condiția $\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq q$ $(\forall)$ $k \geq \mathbf{N_1}$, rezultă $x_{k+1} \leq qx_k$ $(\forall)$ $k \geq \mathbf{N_1}$ sau

$$x_{\mathbf{N_1}+p} \leq q^p x_{\mathbf{N_1}} \quad (\forall) \quad p \geq 1 \tag{5.8}$$

Folosim criteriul comparației ținând seama că seria $\sum\limits_{p\geq 1} q^p$ este convergentă pentru $q \in (0,1)$. Rezultă că $\sum\limits_{k\geq \mathbf{N_1}} x_k$ este convergentă, de unde şi seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă.

b) Din condiția $\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq 1$ pentru $(\forall)$ $k \geq \mathbf{N_2}$ rezultă $x_{k+1} \geq x_k$ $(\forall)$ $k \geq \mathbf{N_2}$, deci şirul $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \not\to 0$. Seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ este divergentă.

Corolar:

Daca $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = l \leq \infty$, atunci:

a) Dacă $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ convergentă;

b) Dacă $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ divergentă

Observație:--

Dacă l=1, nu putem spune nimic despre natura seriei:

Exemple: ---

a) Seria $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$ cu $a>0$ este convergentă deoarece

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a}{k+1}=0<1$$

b) Seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k}{k^b}$ cu $a>1$ şi $b>0$ este divergentă deoarece

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}a\left(\frac{k}{k+1}\right)^b=a>1$$

----

6. Criteriul Raabe – Duhamel

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$; $x_k \in \mathbb{R}^+$

a) Dacă există un număr natural N_1, astfel încât pentru orice $k \geq N_1$ să avem $k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)\geq \lambda > 1$, atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ este convergentă.

b) Dacă există un număr natural N_2, astfel încât pentru orice $k \geq N_2$, să avem $k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)\leq 1$, atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty}x_k$ este divergentă.

Demonstrație:

a) Pentru simplitate, luăm $N_1=1$ şi $\lambda=1+\mu$ unde $\mu>0$. Condiția $k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)\geq 1+\mu$ $(\forall)$ $k\geq 1$ ne permite să scriem:

$$kx_k-(k+1)x_{k+1}\geq \mu x_{k+1}>0 \quad (\forall)\ k\geq 1 \tag{5.9}$$

Prin urmare şirul $(kx_k)_{k\in\mathbf{N}}$ este un şir descrescător de numere pozitive, deci este convergent. Notăm

$$\lim_{k\to\infty}kx_k=l \tag{5.10}$$

Pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty}[kx_k - (k+1)x_{k+1}]$ considerăm suma parțială $s_n = \sum_{k=1}^{n}[kx_k - (k+1)x_{k+1}] = x_1 - (n+1)x_{n+1}$.

Cum $\lim_{n\to\infty} s_n = x_1 - l \in \mathbb{R}$, rezultă că seria $\sum_{k=1}^{\infty}[kx_k - (k+1)x_{k+1}]$ este convergentă, deci convergentă va fi şi seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ conform criteriului comparației şi inegalității (5.9).

b) Din $k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}} - 1\right) \leq 1$ rezultă

$$x_{k+1} \geq \frac{k}{k+1} x_k \quad (\forall)\ k \geq N_2 \tag{5.11}$$

Pentru simplitate luăm N_2 =1 şi obținem

$$x_k \geq \frac{x_1}{k} \quad (\forall)\ k \geq 1 \tag{5.12}$$

Folosim criteriul comparației având în vedere că seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ este divergentă.

<u>Corolar</u>:

Dacă $\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}} - 1\right) = l \leq +\infty$, atunci

a) dacă $l > 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este convergentă.

b) dacă $l < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ este divergentă.

Observație:---

Dacă $l=1$ nu putem spune nimic despre natura seriei.

Exemple: ---

a) Seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{k!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}).....(2+\sqrt{k})}$ este convergentă deoarece

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{\sqrt{k+1}}=\infty>1$$

b) Seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+k-1)}$ cu $\alpha\in(0,2)$ este divergentă deoarece

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}(\alpha-1)=\alpha-1<1$$

----

6. Exerciții rezolvate

1) Să se precizeze natura seriei $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^p\cdot\frac{1}{k^q}$ unde $p,q\geq 1$, $p,q\in\mathbf{N}$

Din criteriul raportului avem $\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^p\cdot\left(\frac{k}{k+1}\right)^p=1$ deci nedeterminare. Atunci folosim criteriul Raabe – Duhamel şi calculăm

$$\lim_{k\to\infty} k\left(\frac{x_k}{x_{k+1}}-1\right)=\lim_{k\to\infty} k\left[\left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^p\left(\frac{k+1}{k}\right)^q-1\right]=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{(2k+2)^p(k+1)^q-(2k+1)}{(2k+1)^p k^{q-1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{p-1}(p+2q)k^{p+q-1}+...}{2^p k^{p+q-1}+...}=\frac{p+2q}{2}>1$$

prin urmare seria este convergentă.

2) Să se precizeze natura seriei $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{\sqrt[k]{k!}}$ după valorile parametrului $a > 0$;

Vom folosi criteriul comparației având în vedere inegalitățile existente

$$1 \le \sqrt[k]{k!} \le k \tag{6.1}$$

sau

$$\frac{a^k}{k} \le \frac{a^k}{\sqrt[k]{k!}} \le a^k \tag{6.2}$$

*) Din $\left| \begin{array}{l} \frac{a^k}{\sqrt[k]{k!}} \le a^k \\ \\ \sum_{k=1}^{\infty} a^k \text{ convergentă pentru } a \in (0,1) \end{array} \right.$

putem spune că seria dată este convergentă pentru $a \in (0,1)$

**)Din $\left| \begin{array}{l} \frac{a^k}{\sqrt[k]{k!}} \ge \frac{a^k}{k} \\ \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k} \text{ divergentă pentru } a > 1 \text{ deoarece } \left(\frac{a^k}{k} \right)_{k \in N} \not\to 0 \\ \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ este divergentă (pentru a=1)} \end{array} \right.$

putem spune că seria dată este divergentă pentru $a \ge 1$

3) Să se determine valorile parametrului $x \in \mathbb{R}$ pentru care seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^k}{\sqrt{k}}$ este absolut convergentă, semiconvergentă sau divergentă.

*) Convergența absolută

Pentru seria modulelor $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin x|^k}{\sqrt{k}}$ aplicăm criteriul raportului

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}}{x_k}=\lim_{k\to\infty}|\sin x|\sqrt{\frac{k}{k+1}}=|\sin x|<1. \text{ Pentru } x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}$$

**) Cazul $x=\frac{\pi}{2}+2n\pi$

Seria dată devine $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$, deci este divergentă deoarece este o serie armonică cu $\alpha=\frac{1}{2}<1$.

***) Cazul $x=\frac{3\pi}{2}+2n\pi$

Seria dată devine $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\sqrt{k}}$, deci este convergentă fiind serie alternată cu

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{k\in N} \searrow 0$$

Obținem următorul rezultat:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\sin x)^k}{\sqrt{k}} \text{ este } \begin{cases} \text{absolut convergentă pentru } x\in\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\} \\ \text{divergentă pentru } x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}\right\} \\ \text{semiconvergentă pentru } x\in\left\{\frac{3\pi}{2}+2n\pi, n\in\mathbb{Z}\right\}\end{cases}$$

4) Să se determine parametrul $z\in\mathbb{C}$ pentru care seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\cdot 2^k}$$

este absolut convergentă, semiconvergentă sau divergentă.

*) Convergența absolută
Pentru seria modulelor aplicăm criteriul raportului

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k\cdot 2^k}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_k+1}{x_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{|z|}{2}\cdot\frac{k}{k+1}=\frac{|z|}{2}<1 \text{ pentru } |z|<2.$$

**) Cazul $|z| = 2$

În seria inițială separăm seria părților reale de cea a părților imaginare folosind forma trigonometrică a parametrului complex z.

$$z = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k} + i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\theta}{k}$$

Folosind criteriul lui Abel se poate arăta că cele două serii sunt convergente.

Pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\theta}{k}$ avem:

a) $(\alpha_k)_{k\in N} = \left(\frac{1}{k}\right)_{k\in \mathbf{N}} \searrow 0$

b) Pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\theta$ şirul sumelor parțiale este mărginit deoarece

$$|s_n| = |\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta| = \left|\frac{\cos\frac{(n+1)\cdot\theta}{2}\cdot\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|},$$

pentru $\theta \neq 2k\pi$

***) Cazul $|z| > 2$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\cdot 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{2}\right)\frac{\cos k\theta}{k} + i\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{2}\right)^k\frac{\sin k\theta}{k}$$

Cele două serii de numere reale sunt divergente deoarece şirurile

$$\left(\left(\frac{|z|}{2}\right)^k\frac{\cos k\theta}{k}\right)_{k\in\mathbf{N}} \not\to 0$$

$$\left(\left(\frac{|z|}{2}\right)^k\frac{\sin k\theta}{k}\right)_{k\in\mathbf{N}} \not\to 0$$

Prin urmare, am obținut următorul rezultat

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k\cdot 2^k} \text{ este: } \begin{cases} \text{- absolut convergentă pentru } z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|<2 \\ \text{- semiconvergentă pentru } z\in\mathbb{C} \text{ cu } |x|=2 \text{ şi } \theta\neq 2k\pi \\ \text{-divergentă pentru } z\in\mathbb{C} \text{ cu } |z|>2 \end{cases}$$

5) Să se calculeze sumele următoarelor serii:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{5^k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

a) Pentru această serie, vom calcula suma, s, folosind definiția

$$s_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

prin urmare

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1\text{, deci } s = 1.$$

b) Seria se poate scrie ca diferența dintre două serii geometrice cu rație subunitară $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^{k+1}}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^k = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} - \frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$, deci

$$s = \frac{5}{6}.$$

c) Vom folosi limita cunoscută a şirului

$(x_k)_{k\in N}$ cu $x_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$, $\lim_{k\to\infty} x_k = e$

În cazul seriei de față, observăm că $s_k = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{n!}$, deci $\lim_{k\to\infty} s_k = e$.

Deci putem reține seria lui e

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$$

d) Pentru calculul sumei acestei serii putem folosi seria numărului e dacă punem seria sub o formă convenabilă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k!}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2}{k!}=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(k-1)+k}{k!}=$$

$$=1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=2e \text{ deci } s=2e\,.$$

CAPITOLUL IV

FUNCȚII VECTORIALE DE VARIABILĂ VECTORIALĂ

4.1. Tipuri de funcții

a) In spațiul vectorial $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}$ considerăm o mulțime $E \subset \mathbb{R}^n$ şi o funcție $f: E \to \mathbb{R}$. Aceasta face să corespundă vectorului $x = (x_1, x_2, ... x_n) \in E$ numărul real pe care îl notăm $f(x)$ sau $f(x_1, x_2, ... x_n)$. O astfel de funcție $\boxed{f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$ o numim <u>funcție reală (scalară) de o variabilă vectorială sau funcție reală (scalară) de n variabile reale</u>.

De exemplu, funcțiile $f, g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$f(x_1, x_2, ... x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n \in \mathbb{R}$

$g(x_1, x_2, ... x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \in \mathbb{R}$

numite funcție sumă, respectiv funcție produs sunt funcții reale de n variabile reale.

Fie: $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ... x_{0n}) \in E$ punct fixat

$x = (x_1, x_2, ... x_n) \in E$ punct curent.

Notăm $E_i = \{x_i \in \mathbb{R} | (x_{01}, ..., x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, ..., x_{on}) \in \mathbb{R}\}$

<u>Definiție:</u>

Funcția $f_i : E_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de relația:

$$f_i(x_i) = f(x_{01}, ..., x_{0i-1}, x_i, x_{0i+1}, ..., x_{0n}) \qquad \textbf{(1.1)}$$

se numeşte <u>funcție parțială</u> a funcției f.

Subliniem faptul că pentru o funcție de $\underline{n}$ variabile putem defini $\underline{n}$ funcții parțiale.

Exemplu: --

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (1.2)

unde $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$

Pentru această funcție putem defini două funcții parțiale.

Pentru $y = \frac{1}{2}$ obținem funcția parțială

$$f_1(x) = f\left(x, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{3}{4} - x^2} \quad (1.3)$$

definită pe mulțimea $E_1 = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \subset \mathbb{R}$

Pentru $x = \frac{1}{5}$ obținem funcția parțială

$$f_2(y) = f\left(\frac{1}{5}, y\right) = \sqrt{\frac{24}{25} - y^2} \quad (1.4)$$

definită pe mulțimea $E_2 = \left[-\frac{\sqrt{24}}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right] \subset \mathbb{R}$

Graficul unei funcții reale de $\underline{n}$ variabile reale este o mulțime din spațiul cu $n+1$ dimensiuni,

$G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \in E\}$

-- 🕮

b) Fie acum $\underline{m}$ funcții reale

$f_1, f_2, \ldots, f_m : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Valorile acestor funcții într-un punct $x \in E$ formează un sistem de $\underline{m}$ numere reale, $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ pe care le putem considera coordonatele unui punct din $\mathbb{R}^m$.

Dacă fiecărui punct $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ facem să-i corespundă punctul $(f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$ obținem o funcție

$$\boxed{f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$$

definită prin egalitatea:

$$\underline{f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))} \tag{1.5}$$

pe care o numim <u>funcție vectorială de o variabilă vectorială sau funcție vectorială de n variabile reale</u> şi o notăm simplu

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m) \tag{1.6}$$

Funcțiile reale $f_1, f_2, ..., f_m : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numesc <u>componentele</u> scalare ale funcției vectoriale f.

Graficul acestei funcții vectoriale este o mulțime din spațiul $\mathbb{R}^{n+m}$

$$G_f = \left\{ (x, f_1(x), ..., f_m(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} \,\middle|\, x \in E \right\}.$$

c) Dacă considerăm spațiul vectorial al vectorilor liberi $\mathcal{V}/\mathbb{R}$, prin analogie, putem defini o funcție vectorială de variabilă vectorială pe care o notăm

$$\boxed{\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}}$$

şi pe care o precizăm prin componentele sale

$$\vec{f} = [f_1, f_2, ..., f_m]$$

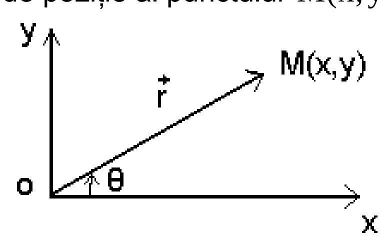
$$f_i : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad i = \overline{1, m}$$

<u>Exemple:</u> ---

*) Cu ajutorul coordonatelor polare, ρ şi θ putem defini o funcție vectorială

$$\vec{r} : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathcal{V}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului $M(x, y)$ din plan



Deoarece

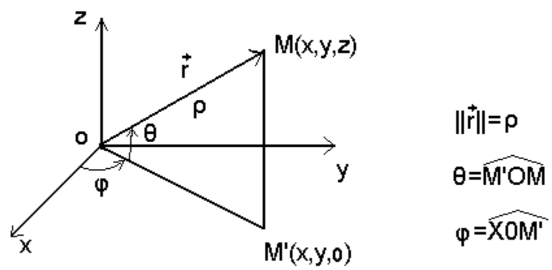
$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \tag{1.7}$$

unde $\rho = \|\vec{r}\|$ iar $\theta = X\hat{O}M$, funcția vectorială $\vec{r}$ este

$$\vec{r} = [\rho\cos\theta, \rho\sin\theta] = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} \tag{1.8}$$

unde $\vec{i} = [1,0]$ şi $\vec{j} = [0,1]$ sunt vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}$

**) Analog, cu ajutorul coordonatelor sferice ρ, θ, şi φ putem defini o funcție vectorială $\vec{r} : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$



$$\left|\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ z = \rho\sin\theta \end{array}\right. \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\vec{r} &= [\rho\cos\theta\cos\varphi, \rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta] = \\ &= \rho\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \rho\sin\theta\,\vec{k}\end{aligned} \tag{1.10}$$

unde $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sunt vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}$

----

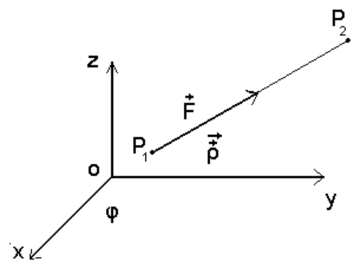
d) Funcția

$$\boxed{\vec{f} : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$

este tot un exemplu de <u>funcție vectorială de o variabilă vectorială</u>.

<u>Exemplu:</u> ---

Dacă considerăm în $\mathbb{R}^3$ două puncte materiale P_1 şi P_2 de mase m_1, m_2 situate la distanța $\underline{r}$ unul față de celălalt, forța $\vec{F}$ cu care punctul material P_1 este atras de P_2, conform legii lui Newton, este



$\vec{F} = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\vec{\rho}$ (1.11)

unde $\vec{\rho} \in \mathbb{R}^3$, $\|\vec{\rho}\| = 1$ (versorul direcției P_1P_2)

Acesta este un exemplu de funcție $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

-- 📖

e) Funcția

$$\boxed{f : E \subset \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \ldots \times \mathbb{R}^3}_{p \text{ ori}} \to \mathbb{R}^3}$$

o numim <u>funcție vectorială de p variabile vectoriale</u>.

<u>Exemplu:</u> --

Dacă studiem mişcarea unui punct material de masă m în câmpul gravitațional al Pământului, forța care acționează asupra lui este forța de greutate

$\vec{F} = m\vec{g}$ (1.12)

Aceeaşi forță o putem exprima prin

$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ (1.12')

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material.

Prin integrarea ecuației

$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}$ (1.13)

obținem

$\vec{r} = \dfrac{t^2}{2}\vec{g} + t\vec{C}_1 + \vec{C}_2$ (1.14)

şi avem un exemplu de funcție $\vec{r} : E \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

-- 📖

4.2. Operații cu funcții vectoriale

Să considerăm funcțiile

$$f : E_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$g : E_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\varphi : E_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Suma $f + g : E_1 \cap E_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este definită astfel

$$\boxed{(f+g)(x) = f(x) + g(x)} \quad (\forall)\ x \in E_1 \cap E_2 \tag{2.1}$$

Produsul αf al funcției f cu scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ este o funcție
$\alpha f : E_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

definită astfel

$$\boxed{(\alpha f)(x) = \alpha f(x)} \quad (\forall)\ x \in E_1 \tag{2.2}$$

În mod asemănător, produsul φf între funcția vectorială f şi funcția scalară φ,

$$\boxed{\varphi f : E_1 \cap E_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$$

este definită de relația

$$\boxed{(\varphi f)(x) = \varphi(x) f(x)} \quad (\forall)\ x \in E_1 \cap E_3 \tag{2.3}$$

Operațiile de adunare şi înmulțire cu scalari (sau cu funcții scalare) ale funcțiilor vectoriale se reduc la operațiile respective, efectuate asupra componentelor lor reale.

Astfel, dacă $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ şi $g = (g_1, g_2, ..., g_m)$, atunci

$$\boxed{\begin{aligned} & f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, ..., f_m + g_m) \\ & \alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, ..., \alpha f_m) \\ & \varphi f = (\varphi f_1, \varphi f_2, ..., \varphi f_m) \end{aligned}} \tag{2.4}$$

Pentru funcțiile vectoriale f şi g putem defini produsul scalar

$$\boxed{\langle f, g \rangle (x) = \langle f(x), g(x) \rangle = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) g_k(x)} \tag{2.5}$$

precum şi norma

$$\boxed{\|f\|(x) = \|f(x)\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} f_k^2(x)}} \qquad (2.6)$$

4.3. Compunerea funcţiilor vectoriale

Să considerăm funcţiile vectoriale

$$f : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m, \qquad f = (f_1, f_2, ..., f_m),$$

$$g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \qquad g = (g_1, g_2, ..., g_p),$$

$$h = g \circ f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \qquad h = (h_1, h_2, ..., h_p)$$

Pentru orice $x \in E$ putem scrie:

$$\boxed{h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (g_1(f(x)), g_2(f(x)), ..., g_p(f(x)))}$$

adică

$$\begin{cases} h_1(x) = g_1(f(x)) = (g_1 \circ f)(x) \\ h_2(x) = g_2(f(x)) = (g_2 \circ f)(x) \\ ... \\ h_p(x) = g_p(f(x)) = (g_p \circ f)(x) \end{cases} \qquad (3.1)$$

Prin urmare, compunerea a două funcţii vectoriale revine la a compune o funcţie scalară cu o funcţie vectorială.

Exemplu: --

Fie funcţiile

$$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to F \subset \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y) = (x\cos y, x\sin y, x),$$

$$g : F \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad g(u, v, w) = (u^2, ve^u, w^2),$$

Funcţia compusă $h = g \circ f$, $h : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ are componentele

$$\left| \begin{array}{l} h_1 = g_1 \circ f \\ h_2 = g_2 \circ f \\ h_3 = g_3 \circ f \end{array} \right.$$

$$h_1(x, y) = g_1(f(x, y)) = g_1(x\cos y, x\sin y, x) = x^2 \cos^2 y$$

$h_2(x,y) = g_2(f(x,y)) = g_2(x\cos y, x\sin y, x) = x\sin y \cdot e^{x\cos y}$
$h_3(x,y) = g_3(f(x,y)) = g_3(x\cos y, x\sin y, x) = x^2$
Prin urmare, funcția compusă h este
$h(x,y) = (x^2\cos^2 y, x\sin y \cdot e^{x\cos y}, x^2)$

4.4. Inversarea funcțiilor vectoriale

Fie aplicația biunivocă
$T : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m$, $\quad T = (f_1, f_2, ..., f_m)$

şi inversa sa
$T^{-1} : F \subset \mathbb{R}^m \to E \subset \mathbb{R}^n$, $\quad T^{-1} = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$

Vom încerca să stabilim o legătură între componentele reale ale funcțiilor T şi T^{-1}.

Putem scrie:
$T(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, $\quad x : E \subset \mathbb{R}^n$,
$T^{-1}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), ..., \varphi_n(y))$, $\quad y : F \subset \mathbb{R}^n$

Pentru fiecare punct $y \in F$ există un punct $x \in E$ şi numai unul astfel încât $y = T(x)$,şi anume punctul $x = T^{-1}(y)$. Altfel spus, pentru fiecare vector $y \in F$, ecuatia
$$y = T(x) \tag{4.1}$$

cu necunoscuta vectorială x, are o singură soluție în E, anume
$$x = T^{-1}(y) \tag{4.2}$$

Fie $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in F$ şi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in E$

Egalitatea (4.1) se scrie
$(y_1, y_2, ..., y_m) = T(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$
adică $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, …, $y_m = f_m(x)$

sau

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ ... \\ y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \qquad (4.3)$$

Ecuația vectorială (4.1) este echivalentă cu sistemul (4.3) de $\underline{m}$ ecuații scalare.

Analog, ecuația (4.2) se scrie
$(x_1, x_2, ..., x_n) = T^{-1}(y) = (\varphi_1(y), \varphi_2(y), ..., \varphi_n(y))$
şi putem spune că este echivalentă cu $\underline{n}$ ecuații scalare

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(y_1, y_2, ..., y_m) \\ x_2 = \varphi_2(y_1, y_2, ..., y_m) \\ ... \\ x_n = \varphi_n(y_1, y_2, ..., y_m) \end{cases} \qquad (4.4)$$

A spune că pentru orice $y \in F$, ecuația $y = T(x)$ are o singură soluție în E, $x = T^{-1}(y)$, revine la a spune că, pentru fiecare sistem de valori $(y_1, y_2, ..., y_m)$ sistemul (4.3) de $\underline{m}$ ecuații cu $\underline{n}$ necunoscute are o singură soluție $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dată de egalitatea (4.4).

4.5. Funcții vectoriale mărginite

Considerăm funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definiție:

Funcția $\underline{f}$ este mărginită pe mulțimea $\underline{E}$ dacă mulțimea valorilor $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ este mărginită.

Aceasta înseamnă că există o sferă în $\mathbb{R}^m$ centrată în origine şi de rază r, $U(0, r)$, astfel încât, $f(E) \subset U(0, r) \subset \mathbb{R}^m$. Aceasta revine la a scrie că pentru orice punct $\underline{x \in E}$ avem $\underline{\|f(x)\| \le r}$.

Obținem astfel o definiție echivalentă cu cea precedentă dată de următoarea

<u>Propoziție:</u>

Funcția $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este mărginită pe mulțimea E dacă şi numai dacă există un număr $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ să avem $\|f(x)\| \leq r$.

Pentru funcția vectorială $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ mai putem demonstra următoarea

<u>Propoziție:</u>

Funcția vectorială f este mărginită dacă şi numai dacă toate componentele sale scalare, $f_1, f_2, ..., f_m$ sunt mărginite.

Intr-adevăr, pentru orice $x \in E$ avem

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$$

şi

$$|f_k(x)| \leq \|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|, \quad k = \overline{1,m}$$

*) Dacă f este mărginită, atunci $\|f(x)\| \leq r \ (\forall) \ x \in E$ şi din inegalitatea $|f_k(x)| \leq \|f(x)\|$ rezultă $|f_k(x)| \leq r \ (\forall) \ x \in E$ şi $k = \overline{1,m}$, deci funcțiile f_k sunt mărginite.

**) Dacă funcțiile f_k sunt mărginite, atunci $|f_k(x)| \leq r_k < \infty \ (\forall) \ x \in E$. Prin urmare $\sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^{m} r_k = r$ şi folosind inegalitatea $\|f(x)\| \leq \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)|$ deducem $\|f(x)\| \leq r \ (\forall) \ x \in E$, deci f este mărginită.

Studiul funcțiilor vectoriale mărginite se reduce la studiul funcțiilor scalare mărginite.

4.6. Limite de funcții vectoriale

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, vectorul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare, pentru E şi vectorul $l \in \mathbb{R}^m$.

Definiție:

Se spune că vectorul $l \in \mathbb{R}^m$ este limita funcției f în $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dacă pentru orice vecinătate a lui l, $U(l) \subset \mathbb{R}^m$, există o vecinătate a lui x_0, $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât pentru orice $x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) \in U(l)$.

Se scrie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Propozițiile următoare dau definiții echivalente ale limitei.

Propoziție 1:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad$ pentru orice şir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_0$ cu $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$, şirul $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \to l$

Propoziție 2:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad$ pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta > 0$ astfel încât oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$, să avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$

Propoziție 3:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad$ pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate a lui x_0, $V_\varepsilon(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât pentru orice $x \in V_\varepsilon(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$ să avem $\|f(x) - l\| < \varepsilon$.

Deoarece $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in E\subset\mathbb{R}^n$ şi $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})\in\mathbb{R}^n$, condiția $x\to x_0$ este echivalentă cu condițiile

$$\left|\begin{array}{l} x_1\to x_{01}\\ x_2\to x_{02}\\ ...\\ x_n\to x_{0n}\end{array}\right.$$

De aceea, în loc de $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, putem scrie $\lim\limits_{\substack{x_1\to x_{01}\\ x_2\to x_{02}\\ ...\\ x_n\to x_{0n}}} f(x_1,x_2,...,x_n)$, şi înțelegem că trecerea la limită se face independent, dar simultan pe componente.

Pentru funcția vectorială $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f=(f_1,f_2,...,f_m)$ putem demonstra următoarea

<u>Propoziție</u>

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=l \iff \lim_{x\to x_0} f_j(x)=l_j,\quad j=\overline{1,m}$$

<u>Demonstrație:</u>

"$\Rightarrow$" $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\to x_0$ cu $x_k\in E$, $x_k\neq x_0$ avem $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}\to l$. Acesta fiind un şir de vectori din $\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$

$(f_j(x_k))_{k\in\mathbb{N}}\to l_j$ cu $j=\overline{1,m} \overset{(def)}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to x_0} f_j(x)=l_j$

Pentru implicația inversă, demonstrația este asemănătoare.

Reținem că

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=(\lim_{x\to x_0} f_1(x),\lim_{x\to x_0} f_2(x),...,\lim_{x\to x_0} f_m(x))}$$

<u>Observație</u>:---

Dacă una dintre componentele reale ale funcției vectoriale f nu are limită în x_0, sau dacă aceasta este infinită atunci f nu are limită în x_0.

Se pot demonstra următoarele <u>proprietăți</u> <u>ale</u> <u>limitelor</u> <u>de</u> <u>funcții</u>

1) Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, punct de acumulare pentru E. Dacă f are limită în x_0, atunci limita este unică.

2) Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, punct de acumulare pentru E, $l \in \mathbb{R}^m$.
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \|f(x)\| = \|l\|$

3) Fie $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare pentru E
Dacă:
a) $(\exists)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$
b) $(\exists)$ $V(x_0)$ a.î. pentru $(\forall)$ $x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$

4) Fie $f, g, h : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, x_0 punct de acumulare pentru E, $l \in \mathbb{R}$.
Dacă:
a) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$
b) $(\exists)$ $V(x_0)$ a.î. pentru $(\forall)$ $x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, avem $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$

5) Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare, $l \in \mathbb{R}$
Dacă:
a) $(\exists)$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
b) $\alpha < \lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \beta$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Atunci: $(\exists)$ $V(x_0)$ a.î. pentru $(\forall)$ $x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $\alpha < f(x) < \beta$

6) Fie $f,g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare pentru E.
Dacă:
a) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) < \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
Atunci: $(\exists)\ V(x_0)$ a.î. pentru $(\forall)\ x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, să avem $f(x) < g(x)$

7) Fie $f,g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, punct de acumulare pentru E; l şi $l^* \in \mathbb{R}^m$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l^*\end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = l + l^*$$

8) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l^*\end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\langle f,g\rangle(x) = \left\langle \lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x)\right\rangle = \langle l, l^*\rangle$$

9) Fie $f,g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, punct de acumulare pentru E; l şi $l^* \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l^*\end{array}\right| \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = l \cdot l^*$$

10) Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, punct de acumulare pentru E.

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) } \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0\\ \text{b) } g \text{ mărginită pe } V(x_0)\end{array}\right| \quad \lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = 0$$

Pentru existenţa limitei într-un punct a unei funcţii vectoriale putem demonstra următoarele criterii.

Criteriul Cauchy – Bolzano

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare pentru E.

Funcția f are limită în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate a lui x_0, $V_\varepsilon(x_0)$, astfel încât pentru orice două puncte x' şi $x'' \in V_\varepsilon(x_0) \cap E$, x' şi $x'' \neq x_0$, să avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

<u>Demonstrație:</u>

"$\Rightarrow$" $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $V_\varepsilon(x_0)$ a.î. pentru $(\forall)$ $x \in V_\varepsilon(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, avem $\|f(x) - l\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Pentru două puncte x' şi $x'' \in V_\varepsilon(x_0) \cap E$, cu x', $x'' \neq x_0$ putem scrie

$$\|f(x') - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\|f(x'') - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Calculăm

$$\|f(x') - f(x'')\| \le \|f(x') - l\| + \|l - f(x'')\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $V_\varepsilon(x_0)$ astfel încât pentru $(\forall)$ x' şi $x'' \in V_\varepsilon(x_0) \cap E$, cu x', $x'' \neq x_0$, să avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Fie şirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_0$ cu $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$. Putem spune că $(\exists)$ un rang N_ε astfel încât pentru orice $p, q > N_\varepsilon$ să avem x_p şi $x_q \in V(x_0)$, x_p şi $x_q \neq x_0$, deci să putem scrie $\|f(x_p) - f(x_q)\| < \varepsilon$.

Rezultă că şirul $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ este un şir Cauchy în $\mathbb{R}^m$ deci este convergent. Rezultă că există $l \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Criteriul majorării

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, x_0 punct de acumulare pentru E şi
$\varphi : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$.
Dacă:
a) $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$
b) $(\exists)\ l \in \mathbb{R}^m$ şi $(\exists)\ V(x_0)$ astfel încât pentru $(\forall)\ x \in V(x_0) \cap E$, $x \neq x_0$, avem $\|f(x) - l\| \leq \varphi(x)$

Atunci: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$

Demonstrație:

Fie un şir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_0$, $x_k \in V(x_0) \cap E$, $x_k \neq x_0$. Conform ipotezei putem scrie

$\lim\limits_{k \to \infty} \varphi(x_k) = 0$

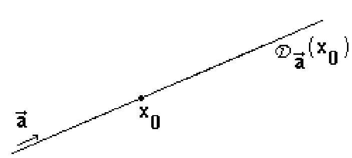
$\|f(x_k) - l\| \leq \varphi(x_k)$

Folosind criteriul comparației de la şiruri, putem spune că $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = l$, de unde rezulta că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

4.7. Limita pe direcție

Fie vectorul $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\|\vec{a}\| = 1$, spunem că $\vec{a}$ este o direcție în $\mathbb{R}^n$.

Notăm $\mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + h\vec{a},\quad h \in \mathbb{R}\}$. Această mulțime din $\mathbb{R}^n$ o numim dreaptă ce trece prin $x_0 \in \mathbb{R}^n$, direcția ei fiind dată de vectorul $\vec{a}$.



Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare al mulțimii E şi $l \in \mathbb{R}^m$.

In cazul limitei pe direcție, ne interesează limita funcției f în x_0 atunci când x se apropie de x_0 pe o dreaptă de direcție $\vec{a}$ ce trece prin acest punct, adică $x \in \mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0) \subset E$.

Definiție:

Spunem că limita funcției f **în** x_0 **pe direcția dată de vectorul** $\vec{a}$ **este** l**,** $\left(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (\vec{a})}} f(x) = l\right)$**, dacă** $l = \lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h\vec{a})$**.**

Definiție:

Spunem că f **<u>are limită pe direcție</u> în** x_0 **dacă** $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h\vec{a}) = l$ **pentru orice vector direcție** $\vec{a}$**.**

Putem afirma că <u>dacă funcția f are limită în x_0, atunci ea are şi limită pe direcție în x_0</u>, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{pentru} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{pentru} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nu are limită în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ deoarece nu are limită pe direcție.

Deoarece este vorba de punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ putem spune că de acest punct ne apropiem pe o dreaptă de ecuație $y = mx$.

Limita pe direcție o putem calcula astfel:

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ (y = mx)}} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m}{1 + m^2}$$

şi cum limita depinde de panta dreptei, deci de direcția pe care ne apropiem de punctul $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, rezultă că f nu are limită pe direcție în $(0,0)\in\mathbb{R}^2$, deci nu are limită în acest punct.

4.8. Limite iterate

Fie funcția $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ şi $x_0=(x_{01},x_{02},...,x_{0n})\in\mathbb{R}^n$, punct de acumulare al mulțimii E.

Din această funcție vectorială de $\underline{n}$ variabile reale, putem obține funcții vectoriale de o variabilă reală, şi anume funcțiile sale parțiale.

$f_i:E_i\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m,\quad i=\overline{1,n}$

$$f_i(x_i)=f(x_1,x_2,...,x_i,...,x_m) \tag{8.1}$$

unde $E_i=\{x_i\in\mathbb{R}|(x_1,x_2,...,x_i,...,x_n)\in E\}$ iar numerele x_{0i} sunt puncte de acumulare pentru aceste mulțimi.

Se pot considera limitele acestor funcții de o singură variabilă.

$$\lim_{x_i\to x_{0i}} f_i(x_i)=\lim_{x_i\to x_{0i}} f(x_1,x_2,...x_i,...,x_n),\ i=\overline{1,n} \tag{8.2}$$

Cu observația că limita (8.2) este o funcție vectorială ce depinde de celelalte n-1 variabile rămase diferite de $\underline{x_i}$. In mod asemănător putem calcula limita

$$\lim_{x_j\to x_{0j}}(\lim_{x_i\to x_{0i}} f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)),\ j\neq i \tag{8.3}$$

care ne conduce la o funcție vectorială ce depinde de cele $\underline{n-2}$ variabile rămase

Acest procedeu se poate continua până se epuizează toate variabilele.

Definiție:

Numim limită iterată a funcției f în punctul $x_0\in\mathbb{R}^n$ limita funcției f In raport cu toate variabilele luate pe rând.

De exemplu:

$$\lim_{x_1\to x_{01}}\lim_{x_2\to x_{02}}...\lim_{x_n\to x_{0n}} f(x_1,x_2,...,x_n) \tag{8.4}$$

Deoarece trecerea la limită se poate face în n! moduri, putem spune că o funcție de $\underline{n}$ variabile are n! limite iterate.

Propoziție:

Dacă există limita unei funcții într-un punct şi una dintre limitele sale iterate în acest punct, atunci aceste limite sunt egale.

Demonstrație:

Pentru simplitate considerăm cazul unei funcții de două variabile $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ punct de acumulare pentru E.

Presupunem că există limitele

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l \in \mathbb{R}^m$$

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = l_{12} \in \mathbb{R}^m \tag{8.5}$$

vom arăta că $l = l_{12}$

Pentru fiecare $x \in E_1 = \{x \in \mathbb{R} | (x, y) \in E\}$ notăm

$$F(x) = \lim_{y \to 0} f(x, y) \tag{8.6}$$

Prin urmare,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = l_{12} \tag{8.7}$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar ales. Deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = l$ comform definiției, putem spune că există o vecinătate $V(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ astfel încât pentru orice $(x, y) \in V(x_0, y_0) \cap E$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, să avem

$$\|f(x, y) - l\| < \varepsilon \tag{8.8}$$

Deoarece pentru fiecare $x \in E_1$ există $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = F(x)$, atunci

$$\lim_{y \to y_0} \|f(x, y) - l\| = \|F(x) - l\| < \varepsilon \tag{8.9}$$

Rezultă că $\|F(x) - l\| < \varepsilon$ pentru orice $x \in E_1$ astfel ca

$(x, y_0) \in V(x_0, y_0) \cap E$

De asemenea putem afirma că

$$\lim_{x \to x_0} \|F(x) - l\| = \left\| \lim_{x \to x_0} F(x) - l \right\| = \|l_{12} - l\| < \varepsilon \qquad (8.10)$$

de unde rezultă $l = l_{12}$.

<u>Observații</u>:---

1) Dacă există numai una dintre cele trei limite
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y))$, $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$
nu rezultă că şi celelalte două limite există.
Este posibil ca numai una sau numai două din aceste limite să existe.

Exemplu:
Funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

nu are limite iterate, dar are limită obişnuită în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} \left[\lim\limits_{y \to 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) \right]$ nu există deoarece funcția sin nu are limită la infinit.

$\lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to 0} \left[\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right) \right]$ nu există din acelaşi motiv.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left[\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \underset{\text{marg}}{\sin \frac{1}{y}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{y} \underset{\text{marg}}{\sin \frac{1}{x}} \right] = 0$ deci există

2) Dacă limita nu există, limitele iterate pot exista amândouă şi să fie diferite.

3) Este posibil ca, deşi (x_0, y_0) este punct de acumulare al mulțimii E, mulțimea $E_1 = \{x \in \mathbb{R} | (x, y) \in E\}$ să nu aibă pe x_0 ca punct de acumulare oricare ar fi y. In acest caz nu are sens $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ oricare ar fi y

---

4.9. Continuitatea funcțiilor vectoriale

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $x_0 \in E$.

Definiție:

Funcția $\underline{f}$ <u>este</u> <u>continuă</u> <u>în</u> $\underline{x_0}$ dacă pentru orice vecinătate a lui $f(x_0)$, $U(f(x_0)) \subset \mathbb{R}^m$, există o vecinătate a lui x_0, $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, astfel încât pentru orice $x \in V(x_0) \cap E$ să avem $f(x) \in U(f(x_0))$.

Cu alte cuvinte, dacă $x_0 \in E$ este punctul de acumulare al acestei mulțimi, putem spune că $\underline{f}$ <u>este</u> <u>continuă</u> <u>în</u> $\underline{x_0}$ dacă $\underline{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$

Putem sublinia următoarele propoziții care dau definiții echivalente ale continuității.

<u>Propoziția 1:</u>

Funcția f este continuă în x_0, dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \to x_0$, $x_k \in E$, şirul $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \to f(x_0)$.

<u>Propoziția 2</u>:

Funcția f este continuă în x_0, dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in E$ cu $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$, să avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Propoziția 3:

Funcția f este continuă în x_0, dacă şi numai dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$ există o vecinătate $V_\varepsilon(x_0)$, astfel încât pentru orice $x \in V(x_0) \cap E$ să avem $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Definiție:

Funcția f este continuă pe mulțimea E dacă ea este continuă în fiecare punct $x \in E$.

Proprietăți ale funcțiilor continue

Fie $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in E$,
$\varphi : E \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Dacă f, g, φ sunt continue în x_0, atunci şi funcțiile $f + g$, αf, φf sunt continue în x_0.

2) Dacă f şi g sunt continue în x_0, atunci şi $\langle f, g \rangle$ este continuă în x_0.

3) Dacă f este continuă în x_0, atunci $\|f\|$ este continuă în x_0.

4) Dacă f este continuă în x_0 şi $f(x_0) \neq 0$ atunci există o vecinătate $V(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in V(x_0) \cap E$, $f(x) \neq 0$.

5) Dacă f este continuă în x_0 şi $f(x_0) \neq 0$ atunci există o vecinătate $V(x_0)$ pe care funcția f este mărginită.

6) Prin compunerea a două funcții vectoriale continue se obține tot o funcție continuă.

<u>Propoziție:</u>

Funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, este continuă în $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă toate componentele sale scalare $f_1,...,f_m : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue în x_0.

<u>Demonstrație:</u> să folosim şirul de inegalități

$$\left|f_k(x) - f_k(x_0)\right| \le \left\|f(x) - f(x_0)\right\| \le \sum_{k=1}^{m}\left|f_k(x) - f_k(x_0)\right|$$

"$\Rightarrow$" Din f continuă în $x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $x \in E$, $\left\|x - x_0\right\| < \delta_\varepsilon$, avem $\left\|f(x) - f(x_0)\right\| < \varepsilon$.

Folosim inegalitatea $\left|f_k(x) - f_k(x_0)\right| \le \left\|f(x) - f(x_0)\right\|$

deducem $\left|f_k(x) - f_k(x_0)\right| < \varepsilon$

pentru orice $x \in E$, $\left\|x - x_0\right\| < \delta_\varepsilon$. Prin urmare funcțiile f_k $(k = \overline{1,m})$ sunt continue în x_0.

"$\Leftarrow$" Din f_k continue în $x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $x \in E$, $\left\|x - x_0\right\| < \delta_\varepsilon$, avem $\left\|f_k(x) - f_k(x_0)\right\| < \dfrac{\varepsilon}{m}$.

Folosim inegalitatea $\left\|f(x) - f(x_0)\right\| \le \sum_{k=1}^{m}\left|f_k(x) - f_k(x_0)\right|$

deducem $\left\|f(x) - f(x_0)\right\| < \varepsilon$

pentru $(\forall)$ $x \in E$, $\left\|x - x_0\right\| < \delta_\varepsilon$. Prin urmare, funcția f este continuă în x_0.

4.10. Continuitatea pe direcție

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in E$ şi $\vec{a}$ un vector direcție în $\mathbb{R}^n$.

Definiție:

Funcția f este continuă în x_0 pe direcție dacă $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h\vec{a}) = f(x_0)$ oricare ar fi vectorul direcție $\vec{a}$, cu $x_0 + h\vec{a} \in E$.

Putem afirma că dacă funcția f este continuă în x_0, atunci ea este continuă şi pe direcție, reciproca nefiind totdeauna adevărată.

Exemplu: --

Funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x^2 - y)^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă pe direcție în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ dar nu este continuă în acest punct.

Pentru continuitatea pe direcție vom calcula limita în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pe dreapta de ecuație $y = mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2}{(m^2+1)x^2 - 2mx + m^2} = 0 = f(0,0)$$

oricare ar fi panta $\underline{m}$ a dreptei, deci oricare ar fi direcția. Rezultă că f este continuă pe direcție în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Pentru a arăta că această funcție nu este continuă în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ este suficient să folosim definiția cu şiruri. Intr-adevăr dacă ne apropiem de punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ cu un şir de puncte situate pe parabola $y = x^2$, constatăm că

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=x^2)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6} = 1 \neq f(0,0)$$

de unde tragem concluzia că f nu este continuă în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

4.11. Continuitatea parțială

Fie din nou funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, şi punctul $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in E$.

Considerăm mulțimea
$E_i = \{x_i \in \mathbb{R} | (x_{01}, x_{02}, ..., x_i, ..., x_{0n}) \in E\}$
precum şi funcția parțială
$f_i : E_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ definită de
$f_i(x_i) = f(x_{01}, x_{02}, ..., x_i, ..., x_{0n})$

Definiție:

Funcția f este continuă parțial în raport cu variabila x_i în punctul $x_0 \in E$ dacă funcția parțială f_i este continuă în punctul $x_{0i} \in E_i$.

Prin urmare, a spune că funcția f este continuă parțial în raport cu variabila x_i în x_0 înseamnă că, pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât oricare ar fi $x_i \in E_i$ cu $|x_i - x_{0i}| < \delta_\varepsilon$ să avem $\|f_i(x_i) - f_i(x_{0i})\| < \varepsilon$, adică
$\|f(x_{01}, ..., x_i, ..., x_{0n}) - f(x_{01}, ..., x_{0i}, ..., x_{0n})\| < \varepsilon$
Dacă funcția f este continuă în $x_0 \in E$, vom spune că aceasta este continuă în x_0 în raport cu ansamblul variabilelor $x_1, x_2, ..., x_n$ pentru a nu confunda cu continuitatea parțială care se referă la o singură variabilă.

Propoziție:

Dacă funcția f este continuă în x_0 în raport cu ansamblul variabilelor, atunci ea este continuă în acest punct în raport cu fiecare variabilă.

<u>Demonstrație:</u>

Din f continuă $x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x = (x_1,...,x_n) \in E$ cu proprietatea $|x_1 - x_{01}| < \delta_\varepsilon,...,|x_n - x_{0n}| < \delta_\varepsilon$ să avem $\|f(x_1,...,x_n) - f(x_{01},...,x_{0n})\| < \varepsilon$.

In particular, dacă
$|x_1 - x_{01}| < \delta_\varepsilon$ şi $x_2 = x_{02}, \ldots, x_n = x_{0n}$

avem
$\|f(x_1, x_{02},..., x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02},..., x_{0n})\| < \varepsilon$
şi putem spune că funcția f este continuă parțial în raport cu variabila x_1 în punctul $x_0 \in E$.

Continuitatea în raport cu celelalte variabile se demonstrează la fel.

<u>Observație</u>:---

Dacă funcția f este continuă în x_0 în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că este continuă în x_0 în raport cu ansamblul variabilelor.

<u>Exemplu:</u> ---
Funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{pentru} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{pentru} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ în raport cu fiecare variabilă, dar nu este continuă în raport cu ansamblul lor.

Avem $f(x,0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ deci $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0 = f(0,0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila x.

De asemenea $f(0,y) = 0$ pentru orice $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deci $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0 = f(0,0)$, adică f este continuă în origine în raport cu variabila y.

Funcția nu este continuă în origine în raport cu ansamblul variabilelor deoarece nu este continuă pe direcție. Intr-adevăr dacă calculăm limita pe o dreaptă $y = mx$ avem

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Cum limita depinde de panta dreptei, rezultă că funcția f nu are limită pe direcție în origine, deci nu este continuă în acest punct.

4.12. Continuitatea uniformă

Inafara continuității punctuale pe care am prezentat-o până acum, pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mai putem defini un tip de continuitate cu caracter global, pe întreaga mulțime E.

Definiție:

Funcția f este uniform continuă pe mulțimea E dacă pentru orice număr $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru oricare două puncte x' şi $x'' \in E$ cu $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$ să avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Propoziție 1:

Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe mulțimea E, atunci ea este şi continuă pe această mulțime.

Această proprietate rezultă din definiția continuității uniforme luând $x'' = x_0$ (fixat).

Observație:---

Reciproca nu este în general adevărată.

Exemplu: ---

Funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x}{x+1}+x$$

este continuă pe acest interval fiind compunere de funcții elementare, dar nu este şi uniform continuă.

*) Dacă luăm două puncte x' şi $x''\in[0,+\infty)$ şi calculăm

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|\frac{x'}{x'+1}+x'-\frac{x''}{x''+1}-x''\right|=$$

$$=\left|x'-x''\right|\cdot\left|1+\frac{1}{(x'+1)(x''+1)}\right|<2\left|x'-x''\right|$$

putem observa că $\left\|f(x')-f(x'')\right\|<\varepsilon$ de îndată ce $\left\|x'-x''\right\|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta_\varepsilon$ deci putem spune că pe intervalul $[0,+\infty)$ funcția este uniform continuă.

**) Dacă luăm două puncte x' şi $x''\in\left(-1,0\right)$ de forma

$$x'=-\frac{k}{k+1} \text{ şi } x''=-\frac{k+1}{k+2},\ k\in\mathbb{N}.$$

putem observa că:

$$\left|x'-x''\right|=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\to 0 \text{ pentru } k\to\infty$$

dar

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=1+\frac{1}{(k+1)(k+2)}>1,$$

deci nu poate tinde la zero pentru $k\to\infty$, prin urmare funcția f nu este uniform continuă pe $(-1,0)$ deci nu este uniform continuă pe $(-1,+\infty)$.

Propoziția 2:

Funcția $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe mulțimea E, dacă şi numai dacă toate componentele sale scalare $f_1,f_2,\ldots,f_m:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sunt uniform continue pe E.

Demonstrație: Folosim inegalitățile

$$|f_i(x')-f_i(x'')| \le \|f(x')-f(x'')\| \le \sum_{i=1}^{m}|f_i(x')-f_i(x'')|$$

pentru $i=\overline{1,m}$

"$\Rightarrow$" Din f continuă pe $E \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon>0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru $(\forall)$ x', $x''\in E$ cu $\|x'-x''\|<\delta_\varepsilon$, avem $\|f(x')-f(x'')\|<\varepsilon$.

Folosim inegalitatea

$$|f_i(x')-f_i(x'')| \le \|f(x')-f(x'')\|$$

şi deducem că

$$|f_i(x')-f_i(x'')| < \varepsilon$$

pentru orice x', $x''\in E$ cu $\|x'-x''\|<\delta_\varepsilon$ şi pentru orice $i=\overline{1,m}$. Prin urmare, funcțiile f_i $(i=\overline{1,m})$ sunt continue pe E

"$\Leftarrow$" Presupunem că f_i sunt funcții uniform continue pe $E \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon>0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru $(\forall)$ x', $x''\in E$ cu $\|x'-x''\|<\delta_\varepsilon$ avem $|f_i(x')-f_i(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{m}$ pentru $i=\overline{1,m}$.

Folosim inegalitatea

$$\|f(x')-f(x'')\| \le \sum_{i=1}^{m}|f_i(x')-f_i(x'')|$$

şi deducem că

$$\|f(x')-f(x'')\| < \varepsilon$$

pentru orice x', $x''\in E$ cu $\|x'-x''\|<\delta_\varepsilon$. Prin urmare, funcția f este uniform continuă pe E.

Proproziția 3:

Dacă funcția $f:E\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe mulțimea E (în raport cu ansamblul variabilelor) atunci ea este uniform continuă pe E în raport cu fiecare variabilă (pentru valori fixate ale celolalte variabile).

<u>Demonstrație:</u> Din f uniform continuă pe $E \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, .x'_n) \in E$ şi $x'' = (x''_1, x''_2, \ldots, .x''_n) \in E$ cu $\|x' - x''\| < \delta_\varepsilon$, avem $\|f(x') - f(x'')\| < \varepsilon$.

Dacă luăm
$x'_2 - x''_2 = a_2$, $x'_3 - x''_3 = a_3, \ldots, x'_n - x''_n = a_n$ unde, $a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ date, atunci

$$\|x' - x''\| = \|(x'_1, a_2, \ldots, a_n) - (x''_1, a_2, \ldots, a_n)\| = |x'_1 - x''_1|$$

Prin urmare, dacă $|x'_1 - x''_1| < \delta_\varepsilon$, avem
$\|f(x'_1, a_2, \ldots, a_n) - f(x''_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \varepsilon$, adică f este uniform continuă pe E în raport cu variabila x_1, atunci când se dau celorlalte variabile valori fixate.

Continuitatea uniformă în raport cu restul variabilelor se demonstrează la fel.

<u>Observație</u>:--

Dacă f este uniform continuă în raport cu fiecare variabilă, nu rezultă că ea este uniform continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

<u>Exemplu:</u> ---
$f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{pentru} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*) Putem arăta că f este uniform continuă pe acest pătrat în raport cu fiecare variabilă. De exemplu, dacă pentru $y = \alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$ fixat, considerăm funcția parțială

$$f_1(x) = f(x,\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x}{x^2 + y^2} & \text{pentru} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$$

putem arăta că f_1 este uniform continuă pe $[-1,1]$.

Intr-adevăr, pentru $x' = \frac{k}{k+1} \in (0,1]$ şi $x'' = \frac{k+1}{k+2} \in (0,1]$ avem

$|x' - x''| = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \to 0$ pentru $k \to \infty$

şi

$|f_1(x') - f_1(x'')| = |\alpha| \cdot \left| \frac{(2-\alpha^2)k^2 - 3\alpha^2 k - 2\alpha^2}{\left[k^2 + \alpha^2(k+1)^2\right] \cdot \left[(k+1)^2 + \alpha^2(k+2)^2\right]} \right| \to \infty$ pentru $k \to \infty$.

La un rezultat asemănător se ajunge şi pentru $x', x'' \in [-1,0]$. Rezultă f_1 uniform continuă pe $[-1,1]$, deci f uniform continuă în raport cu variabila x pe pătratul $[-1,1] \times [-1,1]$.

Pentru un $x = \alpha \in [-1,1] \setminus \{0\}$ se defineşte funcția parțială

$$f_2(y) = f(\alpha, y) = \begin{cases} \frac{\alpha y}{x^2 + y^2} & \text{pentru} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x = 0 \end{cases}$$

şi se arate că este uniform continuă pe $[-1,1]$.

**) In raport cu ansamblul variabilelor, funcția nu poate fi uniform continuă pe $[-1,1] \times [-1,1]$ deoarece ea nu are limită în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, deci nu putem vorbi de continuitate în acest punct.

4.13. Funcții vectoriale continue pe mulțimi compacte

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, unde E este o mulțime compactă (închisă şi mărginită).

<u>Propoziția 1:</u>
O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este uniform continuă pe această mulțime.

<u>Demonstrație:</u> Prin absurd, să presupunem că $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nu este uniform continuă pe E, deci, există un $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât oricare ar fi

$\delta > 0$, există două puncte x' şi $x'' \in E$ cu proprietatea $\|x' - x''\| < \delta$, dar $\|f(x') - f(x'')\| > \varepsilon_0$.

Fie un sir $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}} \to 0$, cu $\delta_k > 0$ $(\forall)$ $k \in \mathbb{N}$. Vom obține două şiruri $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ şi $(x''_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din E care au proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ $\|x'_k - x''_k\| < \delta_k$, dar $\|f(x'_k) - f(x''_k)\| > \varepsilon_0$.

Mulțimea E fiind mărginită, şirul $(x'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este mărginit, deci, conform lemei lui Césaro el conține un subşir convergent
$(x'_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}} \to x_0 \in E$ (deoarece E este închisă)

Observăm că $\|x'_{k_n} - x''_{k_n}\| < \delta_{k_n} \to 0$ pentru $k_n \to \infty$ deci $x'_{k_n} - x''_{k_n} \to 0$ pentru $k_n \to \infty$.

Atunci $x''_{k_n} = (x''_{k_n} - x'_{k_n}) + x'_{k_n} \to 0 + x_0 = x_0$

Din continuitatea pe E a funcției f rezultă continuitatea în x_0 şi putem scrie că
$(f(x'_{k_n}))_{k_n\in\mathbb{N}} \to f(x_0)$
$(f(x''_{k_n}))_{k_n\in\mathbb{N}} \to f(x_0)$

Prin urmare $f(x'_{k_n}) - f(x''_{k_n}) \to 0$. Acest rezultat este fals, deoarece conform ipotezei noastre, $\|f(x'_k) - f(x''_k)\| > \varepsilon_0$
Deoarece am obținut o contradicție, rezultă că f este uniform continuă pe mulțimea E.

Propoziția 2:
O funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă este mărginită pe această mulțime.

Demonstrație

Prin absurd, presupunem că f este nemărginită pe mulțimea E, deci, pentru orice $\alpha > 0$, există un punct $x_\alpha \in E$ astfel încât $\|f(x_\alpha)\| > \alpha$

Luând $\alpha = k \in E$ găsim punctul $x_k \in E$ astfel ca $\|f(x_k)\| > k$

Obținem şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de puncte din mulțimea E (mărginită) care este, mărginit. Conform lemei lui Césaro, acest şir conține un subşir convergent $(x_{k_n})_{k_n} \to x_0 \in E$. Deoarece f este continuă pe E, deci şi în x_0, deducem $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$ deci şi $\|f(x_{k_n})\| \to \|f(x_0)\|$.

Insă, din inegalitatea $\|f(x_{k_n})\| > k_n$, deducem $\|f(x_{k_n})\| \to +\infty$.
Deci, obținem o contradicție, rezultă că f este mărginită pe E.

<u>Propoziția 3:</u>
Dacă $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcție continuă pe mulțimea compactă E, atunci imaginea $f(E) \to \mathbb{R}^m$ este tot o mulțime compactă.

<u>Demonstrație:</u>
Conform propoziției 2, f(E) este o mulțime mărginită. Rămâne să arătăm că este şi închisă.

Fie şirul $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \to y_0$ cu $y_k \in f(E)$. Putem spune că pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ există un $x_k \in E$ astfel ca $f(x_k) = y_k$.

Cum şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ este mărginit (deoarece mulțimea E este mărginită) rezultă că el conține un subşir convergent, $(x_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}} \to x_0 \in E$.
Funcția f fiind continuă în x_0 (căci este continuă pe E rezultă că $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(x_0) \in E$

Din $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \to y_0$ şi $(y_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ este un subşir convergent al şirului $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, rezultă că $(y_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}} \to y_0$. Limita fiind unică, deducem $y_0 = f(x_0)$, deci $y_0 \in f(E)$, adică mulțimea $f(E) \subset \mathbb{R}^m$ este închisă.

<u>Propoziția 4:</u>
O funcție reală $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuă pe mulțimea compactă $E \subset \mathbb{R}^m$, îşi atinge marginile pe această mulțime.

Aceasta înseamnă că există două puncte x_0' şi $x_0'' \in E$ astfel încât

$$f(x_0') = \inf_{x\in E} f(x)$$

$$f(x_0'') = \sup_{x\in E} f(x)$$

<u>Propoziția 5:</u>

Dacă $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcție vectorială continuă pe o mulțime compactă E, atunci exista un punct $x_0 \in E$ astfel încât

$$\|f(x_0)\| = \sup_{x \in E} \|f(x)\|$$

4.14. Exerciții rezolvate

1) Să se arate că funcția $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x-y} \quad \text{cu} \quad x \neq y$$

nu are limită în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Dacă apelăm la definiția cu şiruri, este suficient să găsim două şiruri diferite din $\mathbb{R}^2$ convergente către punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pentru care şirurile imaginilor să fie diferite.

*) Fie şirul $\left(\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}} \to (0,0)$ pentru $k \to \infty$.

Şirul imaginilor este $\left(f\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{(3/k)}{(-1/k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \to -3$ pentru $k \to \infty$.

**) Fie şirul $\left(\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}} \to (0,0)$ pentru $k \to \infty$.

Şirul imaginilor este $\left(f\left(\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{0}{(2/k)}\right)_{k \in \mathbb{N}} \to 0$ pentru $k \to \infty$.

Rezultă că funcția nu are limită în punctul $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

2) Să se arate că funcția $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

nu are limită în punctul $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

Vom considera şi în acest caz două şiruri distincte din $\mathbb{R}^3$ cu limita $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

*) Fie şirul $\left(\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k},\frac{3}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \to (0,0,0)$ pentru $k \to \infty$.

Şirul imaginilor este $\left(f\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k},\frac{3}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(6/k^2)}{(14/k^2)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to \frac{3}{7}$ pentru $k \to \infty$.

**) Fie şirul $\left(\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} \to (0,0,0)$ pentru $k \to \infty$.

Şirul imaginilor este $\left(f\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(1/k^2)}{(3/k^2)}\right)_{k\in\mathbb{N}} \to \frac{1}{3}$ pentru $k \to \infty$.

Rezultă că funcția f nu are limită în punctul $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

3) Pentru funcția $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$ unde

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2) = \ln \ \sin\dfrac{x_1}{x_2} \\ f_2(x_1,x_2) = x_1^2 + x_1 \cos x_2 \end{cases}$$

să se calculeze limita în punctul $x_0 = \left(\frac{\pi}{4},1\right)$ pe direcția dată de vectorul $\vec{a} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Fiind o funcție vectorială, limita pe direcție este un vector din $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h\vec{a}) = (\lim_{h\to 0} f_1(x_0 + h\vec{a}), \lim_{h\to 0} f_2(x_0 + h\vec{a}))$$

de asemenea avem

$$x_0 + h\vec{a} = \left(\frac{\pi}{4} + h\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

*) $\lim\limits_{h\to 0} f_1(x_0 + h\vec{a}) = \lim\limits_{h\to 0} f_1\left(\frac{\pi}{4} + h\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + h\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\sin\frac{\frac{\pi}{4}+h\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+h\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = \ln\left(\sin\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

**) $\lim_{h\to 0} f_2(x_0 + h\vec{a}) = \lim_{h\to 0} f_2\left(\frac{\pi}{4}+h\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\left(\frac{\pi}{4}+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\cos 1$$

Rezultă

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h\vec{a}) = \left(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{4}\cos 1\right) \in \mathbb{R}^2$$

4) Pentru $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \left| e^{\frac{1}{x+iy}} \right|$$

să se studieze dacă are limită în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Mai întâi explicităm funcția

$$f(x,y) = \left| e^{\frac{1}{x+iy}} \right| = \left| e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}} \right| = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \left| e^{\frac{-iy}{x^2+y^2}} \right| =$$

$$= e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \left| \cos\frac{y}{x^2+y^2} - i\ \sin\frac{y}{x^2+y^2} \right| = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$$

Verificăm dacă funcția are limită pe direcție în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ pe dreapta de ecuație $y = mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx)}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{(1+m^2)x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{(1+m^2)x}} = \begin{cases} \infty & \text{pentru} \quad x > 0 \\ 0 & \text{pentru} \quad x < 0 \end{cases}$$

Rezultă că f nu are limită pe direcție în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, deci nu are limită în acest punct.

5) Pentru $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^4}$$

să se calculeze limitele iterate şi limita obişnuită în punctul $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

*) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^4}\right]=0$

**) $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^4}\right]=0$

***) Funcţia nu are limită obişnuită în $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ deoarece:

a) pentru $((x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}=\left(\left(\frac{1}{k},\frac{2}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}\to(0,0)$, şirul imaginilor $(f(x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}=\left(\dfrac{4/k^4}{5/k^4}\right)_{k\in\mathbb{N}}\to\dfrac{4}{5}$

b) pentru $((x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}=\left(\left(\frac{1}{k},\frac{3}{k}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}\to(0,0)$, şirul imaginilor $(f(x_k,y_k))_{k\in\mathbb{N}}=\left(\dfrac{9/k^4}{25/k^4}\right)_{k\in\mathbb{N}}\to\dfrac{9}{25}$

6) Să se studieze continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ a funcţiei:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{pentru } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Este suficient să verificăm continuitatea în punctul $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ deoarece în celelalte puncte funcţia este continuă fiind compunere de funcţii elementare.

*) Verificăm continuitatea pe direcţie calculând limita următoare:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx)}} f(x,y)=\lim_{x\to 0} f(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\left[(1+m^3)x^3\right]}{(1+m^2)x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\sin\left[(1+m^3)x^3\right]}{2x(1+m^2)}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x \sin\left[(1+m^3)x^3\right]}{2(1+m^2)} = 0 = f(0,0)$$

deci f este continuă pe direcție în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Acest rezultat nu este suficient pentru a putea trage o concluzie în legătură cu conținuitatea obişnuită.

**) Calculăm limita în origine punând funcția sub o formă convenabilă:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2\sin^2 \frac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2} = 2\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin^2 \frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2} \cdot \frac{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^6+y^6+2x^3y^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left[x^4 - x^2y^2 + y^4 + \frac{2x^3y^3}{x^2+y^2}\right] = \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\frac{1}{xy^3} + \frac{1}{x^3y}} = 0 = f(0,0)$$

Rezultă că f este continuă în origine, deci este funcție continuă în $\mathbb{R}^2$.

7) Să se studieze continuitatea pe $\mathbb{R}^2$ pentru următoarele funcții

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{pentru } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{pentru } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

In ambele cazuri, este suficientă verificarea continuității în origine

*) f_1 nu este continuă în origine deoarece nu are limită pe direcție în acest punct

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(y=mx)}} f_1(x,y)=\lim_{x\to 0} f_1(x,mx)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+m^2)}=\frac{1}{1+m^2}$$

**) f_2 este continuă în origine deoarece

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\text{fact.marginit}}=0=f(0,0)$$

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le 1$$

CAPITOLUL V

DERIVATE PARȚIALE ALE UNEI FUNCȚII VECTORIALE

5.1. Derivata pe direcție a unei funcții scalare

Considerăm o funcție scalară $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punct $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots x_{0n}) \in \overset{o}{E}$ şi vectorul $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ cu $\|\vec{a}\| = 1$ pe care îl folosim ca vector direcție în $\mathbb{R}^n$. De asemenea, considerăm dreapta $\mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0) = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + h\vec{a}, h \in \mathbb{R}\} \subset E$

Definiție:

Spunem că funcția f este derivabilă în punctul x_0 pe direcția dată de vectorul $\vec{a}$ dacă există şi este finită limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h} \overset{(not)}{=} \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) \qquad \textbf{(1.1)}$$

Definiție:

Spunem că funcția f este derivabilă pe mulțimea deschisă E pe direcția $\vec{a}$ dacă ea este derivabilă pe direcția $\vec{a}$ în orice punct $x \in E$.

Aplicația care duce vectorul $x \in E$ în numărul real $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x) \in \mathbb{R}$ se numeşte derivata funcției f pe direcția $\vec{a}$ şi se notează $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ sau $f'_{\vec{a}}$, $\mathcal{D}_{\vec{a}} f$.

În (1.1) limita notată $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0)$ o numim derivata funcției f în x_0 pe direcția $\vec{a}$.

Fie mulțimea $F = \{h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h\vec{a} \in E\} \subset \mathbb{R}$ şi funcția $\varphi : F \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(h) = f(x_0 + h\vec{a}) \qquad (1.2)$$

Observăm că

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi'(0)$$

Prin urmare, derivata pe direcție se poate calcula cu ajutorul derivatei funcției φ, funcție de o singură variabilă, adică

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \varphi'(0)} \tag{1.3}$$

<u>Exemple:</u> --

1) Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 \cos x_2$ în punctul $x_0 = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ pe direcția dată de $\vec{a} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Folosind definiția, putem scrie

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - 1_{0/0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) Să se calculeze derivata funcției $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 7$ în punctul $x_0 = (1,2)$ pe direcția $\vec{a} = \left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Dacă folosim formula (1.3), putem scrie

$$\varphi(h) = f(x_0 + h\vec{a}) = f\left(1+\frac{h}{2}, 2 + h\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$= \left(1+\frac{h}{2}\right)^3 + \left(1+\frac{h}{2}\right)^2 + \left(2+h\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(1+\frac{h}{2}\right)\left(2+h\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\varphi'(h) = \frac{3}{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)^2 + \left(1+\frac{h}{2}\right) + \sqrt{3}\left(2+h\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(2+h\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

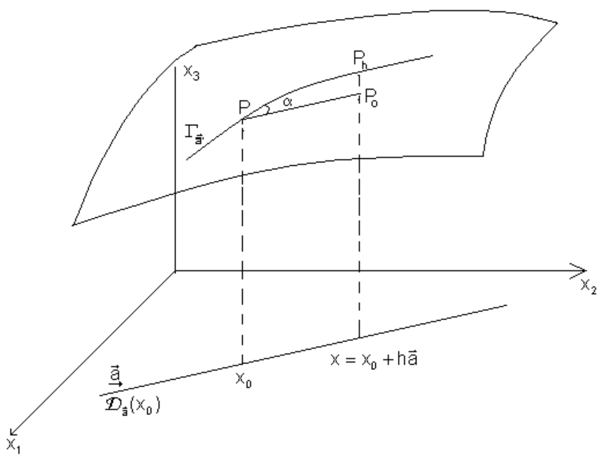
Cum $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \varphi'(0)$, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$

Putem da o <u>interpretare geometrică</u> a derivatei pe direcție a unei funcții scalare. Pentru simplitate, luăm o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al cărei grafic este o mulțime din $\mathbb{R}^3$.

$G_f = \left\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x_1, x_2) \in E\right\}$

De asemenea, considerăm dreapta

$\mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0) = \{x \in E | x = x_0 + h\vec{a}, h \in \mathbb{R}\}$



Punctelor situate în planul (x_1, x_2) pe dreapta $\mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0)$ le corespund pe grafic, puncte situate pe curba $\Gamma_{\vec{a}}$. Astfel punctului $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0)$ îi corespunde punctul $P(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_{\vec{a}}$, iar punctului $x_0 = x_0 + h\vec{a} \in \mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0)$ îi corespunde punctul $P_h(x_0 + h\vec{a}, f(x_0 + h\vec{a})) \in \Gamma_{\vec{a}}$

Dacă ducem $PP_0 \| \mathcal{D}_{\vec{a}}(x_0)$, putem observa că

$$tgP_h\hat{P}P_0 = \frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h} \qquad (1.4)$$

prin urmare expresia $\frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h}$ reprezintă coeficientul unghiular al dreptei PP_h față de direcția $\vec{a}$.

Rezultă că $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h}$ reprezintă coeficientul unghiular al tangentei la curba $\Gamma_{\vec{a}}$ în punctul P față de direcția $\vec{a}$.

Proprietăți ale funcțiilor scalare derivabile pe direcție

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ şi $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ un vector direcție.

1) Dacă f este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$, atunci f este derivabilă în x_0 pe direcția $-\vec{a}$ şi avem

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x_0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0)$$

Intr-adevăr, dacă folosim definiția,

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h(-\vec{a})) - f(x_0)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + (-h)\vec{a}) - f(x_0)}{-h} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0)$$

2) Dacă f este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$, atunci f este derivabilă în x_0 pe direcția $(\alpha\vec{a})$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$ şi avem

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\vec{a})}(x_0) = \alpha \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0)$$

Folosind definiția, putem scrie

$$\frac{\partial f}{\partial(\alpha\vec{a})}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h(\alpha\vec{a})) - f(x_0)}{h} = \alpha \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + (\alpha h)\vec{a}) - f(x_0)}{\alpha h} = \alpha \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0)$$

3) Dacă f este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$, atunci f este continuă în x_0 pe direcția $\vec{a}$

Calculăm:

$$\lim_{h \to 0}\left[f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)\right] = \lim_{h \to 0}\left[\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h} \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{\partial f}{\partial a}(x_0),\text{finit}}}{\frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h}}\right] = 0$$

Prin urmare $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h\vec{a}) = f(x_0)$ deci f este continuă în x_0 pe direcția $\vec{a}$.

4) Fie $f_k : E_k \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,p}$ $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{p} \overset{o}{E}$, $\vec{a}$ vector direcție.

Dacă funcțiile $f_1, f_2, ..., f_p$ sunt derivabile în x_0 pe direcția $\vec{a}$, atunci funcția $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k$ cu $\alpha_k \in \mathbb{R}$ este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$ şi

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k\right)(x_0) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \frac{\partial f_k}{\partial \vec{a}}(x_0) \qquad (1.7)$$

5) Dacă funcțiile $f_1, f_2, ..., f_p$ sunt derivabile în x_0 pe direcția $\vec{a}$, atunci funcția produs $\prod_{k=1}^{p} f_k$ este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$ şi

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\prod_{k=1}^{p} f_k\right)(x_0) = \sum_{k=1}^{p} f_1(x_0)...\frac{\partial f_k}{\partial \vec{a}}(x_0)...f_p(x_0) \qquad (1.8)$$

6) Dacă $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt derivabile în x_0 pe direcția $\vec{a}$ cu $g(x) \neq 0$ într-o vecinătate a punctului x_0, atunci funcția $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$ şi avem

$$\frac{\partial}{\partial \vec{a}}\left(\frac{f}{g}\right)(x_0) = \frac{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0) g(x_0) - f(x_0)\frac{\partial g}{\partial \vec{a}}(x_0)}{g^2(x_0)} \qquad (1.9)$$

7) Considerăm funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, vectorul direcție $\vec{a}$ şi segmentul
$S = [x_0, x_0 + h\vec{a}] \subset \mathcal{V}_{\vec{a}}(x_0) \subset E$ Dacă exsită derivata pe direcție $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ pe mulțimea S, atunci există un $\theta \in (0,1)$ astfel încât

$$\boxed{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0) = h\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x_0 + \theta h\vec{a})} \qquad (1.10)$$

Aceasta este <u>formula</u> <u>lui</u> <u>Lagrange</u> (formula creşterilor finite)

Demonstrația se bazează pe formula creşterilor finite pentru funcții de o variabilă.

Notăm $\varphi:[0,h]\to\mathbb{R}$, $\varphi(t)=f(x_0+t\vec{a})$. Deoarece funcția φ este continuă pe $[0,h]$ şi derivabilă pe $(0,h)$ rezultă că există un $\theta\in(0,1)$ astfel încât să putem scrie $\varphi(h)-\varphi(0)=h\varphi'(\theta h)$, adică

$$f(x_0+h\vec{a})-f(x_0)=h\frac{\partial f}{\partial\vec{a}}(x_0+\theta h\vec{a})$$

5.2. Derivata pe direcție a unei funcții vectoriale

Să considerăm de data aceasta o funcție vectorială $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ pe care o definim prin componentele sale scalare, $f_1,f_2,...,f_m:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, punctul $x_0\in\overset{o}{E}$ şi vectorul direcție $\vec{a}\in\mathbb{R}^n$.

Definiție:

Funcția vectorială f este derivabilă în x_0 pe direcția $\vec{a}$, dacă există

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h\vec{a})-f(x_0)}{h}\overset{(not)}{=}\frac{\partial f}{\partial\vec{a}}(x_0)\in\mathbb{R}^m \qquad (2.1)$$

Trebuie să subliniem faptul că (2.1) este o relație vectorială echivalentă cu m relații scalare,

$$\lim_{h\to0}\frac{f_i(x_0+h\vec{a})-f_i(x_0)}{h}=\frac{\partial f_i}{\partial\vec{a}}(x_0)\in\mathbb{R},\quad i=\overline{1,m}$$

astfel încât vectorul limită $\frac{\partial f}{\partial\vec{a}}(x_0)$ este

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial\vec{a}}(x_0)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial\vec{a}}(x_0),...,\frac{\partial f_m}{\partial\vec{a}}(x_0)\right)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_k}{\partial\vec{a}}(x_0)\ e_k\in\mathbb{R}^m}$$

unde vectorii $e_1,e_2,...,e_k\in\mathbb{R}^m$ formează baza canonică din spațiul vectorial $\mathbb{R}^m$.

<u>Definiție:</u>

Funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă pe direcția $\vec{a}$ pe mulțimea deschisă E, dacă ea este derivabilă pe direcția $\vec{a}$ în orice punct ce aparține acestei mulțimi.

Astfel, aplicația ce duce vectorul $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ în vectorul $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x) \in \mathbb{R}^m$ se numeşte <u>derivata</u> <u>funcției</u> <u>f</u> <u>pe</u> <u>direcția</u> <u>$\vec{a}$</u> şi o notăm cu $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$. Este o funcție vectorială pe care o definim cu ajutorul componentelor sale scalare

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \vec{a}}, \frac{\partial f_2}{\partial \vec{a}}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial \vec{a}} \right) \tag{2.2}$$

Prin urmare, derivata pe direcție a unei funcții vectoriale se determină calculând derivatele pe direcție ale componentelor sale scalare.

Se poate demonstra următoarea

<u>Propoziție:</u>

Funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ este derivabilă în $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ pe direcția $\vec{a}$, dacă şi numai dacă toate componentele sale scalare, $f_1, f_2, \ldots, f_m$, sunt funcții derivabile în x_0 pe direcția $\vec{a}$.

<u>Demonstrație:</u> Se foloseşte egalitatea

$$\frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h} = \sum_{k=1}^{m} \frac{f_k(x_0 + h\vec{a}) - f_k(x_0)}{h} \, e_k \tag{2.3}$$

şi se observă că $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{a}) - f(x_0)}{h}$ există, dacă şi numai dacă există limitele $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f_k(x_0 + h\vec{a}) - f_k(x_0)}{h}$ pentru orice $k = \overline{1,m}$.

<u>5.3. Derivate parțiale</u>

Considerăm funcția scalară $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, punctul $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ şi mulțimea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Fie şi mulțimea $\mathcal{D}_{\vec{e}_j}(x_0) = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + h\vec{e}_j, h \in \mathbb{R}\}$

<u>Definiție:</u>

Funcția <u>f este derivabilă parțial în punctul x_0 în raport cu variabila x_j</u>, dacă ea este derivabilă în x_0 pe direcția dată de vectorul $\vec{e}_j$.

In cazul de față, notăm

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_j}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h\vec{e}_j) - f(x_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \tag{3.1}$$

<u>Definiție:</u>

Funcția <u>f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j pe mulțimea deschisă E</u> dacă ea este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în fiecare punct $x \in E$.

Aplicația care duce un punct $x \in E$ în numărul $\frac{\partial f}{\partial x}(x) \in \mathbb{R}$ se numeşte <u>derivată partială a funcției f în raport cu variabila x_j</u> şi se notează $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sau f'_{x_j}, $\partial_{x_j} f$.

Deoarece $\vec{e}_j = [0,0,\ldots,1,\ldots,0] \in \mathbb{R}^n$ are numai componenta j egală cu 1, deducem că vectorul

$$x_0 + h\vec{e}_j = \left(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0j} + h, \ldots, x_{0n}\right) \tag{3.2}$$

Prin urmare,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h\vec{e}_j) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_{01},\ldots,x_{0j} + h,\ldots,x_{0n}) - f(x_{01},\ldots,x_{0j},\ldots,x_{0n})}{h} =$$

$$= \lim_{x_j\to x_{0j}}\frac{f(x_{01},\ldots,x_j,\ldots,x_{0n}) - f(x_{01},\ldots,x_{0j},\ldots,x_{0n})}{x_j - x_{0j}}$$

unde am notat

$$x_j = x_{0j} + h \tag{3.3}$$

Dacă considerăm funcția parțială a lui f

$$\begin{cases} F_j : E_j \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ F_j(x_j) = f(x_{01},\dots,x_j,\dots,x_{0n}) \\ E_j = \{x_j \in \mathbb{R} \mid (x_{01},\dots,x_j,\dots,x_{0n}) \in E\} \end{cases} \tag{3.4}$$

atunci derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ o putem exprima cu ajutorul funcției parțiale F_j, adică

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{x_j \to x_{0j}} \frac{F_j(x_j) - F_j(x_{0j})}{x_j - x_{0j}} \overset{(def)}{=} F_j'(x_{0j}) \tag{3.5}$$

Prin urmare, putem afirma că funcția f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă funcția parțială F_j este derivabilă în punctul $x_{0j} \in E_j$.

In acest caz avem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = F_j'(x_{0j}) \tag{3.6}$$

<u>Observații</u>:---

a) Pentru o funcție de $\underline{n}$ variabile putem defini $\underline{n}$ derivate $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pe care le numim <u>derivate parțiale de ordinul întâi</u>.

b) Practic, derivata parțială $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ se calculează considerând pe $x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n$ constante şi derivând-o ca pe o funcție de o singură variabilă x_j.

<u>Exemplu:</u> ---

Funcția $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(x,y,z) = xy + \cos^2 x + 3\sin z + \ln(xz)$

are trei derivate parțiale de ordinul întâi.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - 2\cos x \sin x + \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 3\cos z + \dfrac{1}{z} \end{cases}$$

Să considerăm funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$ şi $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ... x_{0n}) \in E$.

Derivata parțială în raport cu x_j în punctul x_0 este un vector din $\mathbb{R}^m$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_0), ..., \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x_0) \right) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_0)\ e_k \tag{3.7}$$

<u>Propoziția 1:</u>

Funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în punctul $x_0 \in E$, dacă şi numai dacă toate componentele sale scalare $f_1, f_2, ..., f_m$ sunt derivabile parțial în raport cu variabila x_j în x_0.

Demonstrația este imediată şi foloseşte faptul că funcția parțială F_j definită pentru funcția f, este o funcție vectorială cu $\underline{m}$ componente, $F_j = (F_j^1, F_j^2, ..., F_j^m)$ şi

$$\frac{F_j(x_j) - F_j(x_{0j})}{x_j - x_{0j}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{F_j^{\,k}(x_j) - F_j^{\,k}(x_{0j})}{x_j - x_{0j}} e_k \tag{3.8}$$

<u>Propoziția 2:</u>

Dacă funcția vectorială f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_j în x_0 $\Rightarrow$ f este continuă parțial în x_0 în raport cu variabila x_j.

Observație:---

Dacă funcția f este derivabilă parțial în x_0 în raport cu toate variabilele, atunci f este continuă parțial în x_0 în raport cu toate variabilele luate în parte. Nu rezultă, de aici, că f este continuă în x_0 în raport cu ansamblul variabilelor.

Propoziția 3:

Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele într-o vecinătate $V(x_0)$, $x_0 \in \overset{o}{E}$, atunci pentru orice punct $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V(x_0) \cap E$, există $\underline{n}$ numere $\zeta_k \in [x_{0k}, x_k]$ astfel încât:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)(x_k - x_{0k}) \tag{3.9}$$

Aceasta este formula lui Lagrange pentru o funcție vectorială de $\underline{n}$ variabile reale.

Propoziția 4:

Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ are derivate parțiale mărginite într-o vecinătate $V(x_0) \cap E$ $\left(x_0 \in \overset{o}{E}\right)$ atunci f este continuă în x_0 (în raport cu ansamblul variabilelor)

Demonstrație:

Din $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ mărginite pe $V(x_0) \cap E \Rightarrow$ există un $M > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $x \in V(x_0) \cap E$ să avem $\left\| \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right\| \le M$, $k = \overline{1,n}$

Folosind formula Lagrange (3.9) avem

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)(x_k - x_{0k}) \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \right\| \cdot |(x_k - x_{0k})| \le M \sum_{k=1}^{m} |(x_k - x_{0k})| \to 0$$

când $x_k \to x_{0k}$.

De aici rezultă că $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0.

<u>Corolarul 1:</u> Dacă toate derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ există într-o vecinătate $V(x_0) \cap E$ şi sunt continue în x_0, atunci funcția f este continuă în x_0.

Intr-adevăr dacă derivatele $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ sunt continue în x_0, atunci ele sunt mărginite pe o vecinătate a acestui punct.

<u>Corolarul 2:</u> Dacă toate derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ există pe mulțimea deschisă E şi sunt continue sau mărginite pe E, atunci funcția f este continuă pe E.

<u>5.4. Derivate parțiale de ordin superior</u>

Considerăm funcția vectorială $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, şi presupunem E mulțime deschisă.

Dacă pe mulțimea E este definită funcția vectorială ce duce $x \in E \subset \mathbb{R}^n$ în vectorul $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \in \mathbb{R}^m$, numită <u>derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_j</u>, se poate pune problema existenței derivatelor parțiale ale acestei funcții.

<u>Definiție:</u>

Derivatele parțiale ale funcțiilor vectoriale $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = \overline{1,n})$, dacă există se numesc <u>derivatele parțiale de ordinul doi</u> ale funcției f şi se notează

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots (i, j = \overline{1,n}) \qquad \textbf{(4.1)}$$

sau $f''_{x_i x_j}$, $\partial_{x_i x_j} f$.

<u>Observație</u>:--

a) Dacă f nu are derivate parțiale de ordin întâi într-un punct, atunci f nu are nici derivate parțiale de ordinul doi în acel punct.

b) O funcție vectorială f de <u>n</u> variabile reale poate avea <u>n</u> derivate parțiale de ordinul întâi şi <u>n^2</u> derivate parțiale de ordinul doi.

c) Funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ cu $i \neq j$ se numesc <u>derivate</u> <u>parțiale</u> <u>mixte</u>. Daca $i = j$, derivata se notează $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}$.

In acelaşi mod, se definesc <u>derivatele parțiale de ordinul trei</u> ale unei funcții vectoriale f: sunt derivatele parțiale ale derivatelor parțiale de ordin doi ale funcției f. Analog, putem defini derivatele parțiale de un ordin $p \in \mathbb{N}$ oarecare.

In general, derivatele parțiale mixte de ordinul doi nu sunt egale $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)$.

De asemenea nu sunt egale nici derivatele parțiale mixte de un ordin p oarecare, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, ele diferind doar prin ordinea în care s-a făcut derivarea.

<u>Definiție:</u>

Vom spune că $\underline{f \in C^p(E)}$ dacă f este funcție continuă pe E împreună cu toate derivatele sale parțiale până la ordinul p inclusiv.

Condiții suficiente pentru egalitatea derivatelor parțiale mixte sunt date de

Criteriul lui Schwarz

Dacă $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^p(E)$ atunci orice derivate parțiale mixte de ordin mai mic sau egal cu <u>p</u> care diferă între ele doar prin ordinea de derivare, sunt egale.

<u>Demonstrație:</u> pentru simplitate, demonstrația o facem pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(E)$ şi vom arăta că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pe mulțimea E.

Fie numerele $h, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât punctul $(x+h, y+h) \in E$.
Fie funcția $H : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x,y)] \tag{4.2}$$

Dacă considerăm funcția $\varphi : [y, y+k] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = f(\alpha, t) \tag{4.3}$$

deoarece am presupus $f \in C^2(E)$, putem spune că aceasta este funcție Rolle pe $[y, y+k]$. Putem aplica teorema lui Lagrange, deci există un $k' \in (0, k)$ astfel încât să putem scrie

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) = k\varphi'(y+k') \tag{4.4}$$

sau dacă ținem seama de (4.3)

$$f(\alpha, y+k) - f(\alpha, y) = k\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, y+k') \tag{4.5}$$

Rezultă că

$$H(x,y) = k\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+k') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+k')\right] \tag{4.6}$$

Dacă procedăm asemănător şi considerăm funcția $\psi : [x, x+h] \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y+k') \tag{4.7}$$

aceasta este funcție Rolle pe $[x, x+h]$, deci există un $h' \in (0, h)$ astfel încât să putem scrie formula lui Lagrange

$$\psi(x+h) - \psi(x) = h\psi'(x+h') \tag{4.8}$$

adică

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y+k') - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+k') = h\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+h', y+k') \tag{4.9}$$

Prin urmare, funcția $H(x,y)$ devine

$$\boxed{H(x,y) = hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+h', y+k')} \tag{4.10}$$

Folosim aceeaşi funcţie H(x,y) scrisă sub forma

$$H(x,y)=[f(x+h,y+k)-f(x,y+k)]-[f(x+h,y)-f(x,y)] \tag{4.11}$$

Procedăm asemănător şi aplicăm de două ori teorema lui Lagrange. Putem spune că există $k''\in(0,k)$ şi $h''\in(0,h)$ astfel încât

$$\boxed{H(x,y)=hk\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x+h'',y+k'')} \tag{4.12}$$

Din (4.10) şi (4.12) reţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+h',y+k')=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x+h'',y+k'') \tag{4.13}$$

Fie şirul $((x+h_n,y+k_n))_{n\in\mathbb{N}}\to(x,y)$ pentru $n\to\infty$.

Pentru fiecare termen al şirului există numerele $h'_n,h''_n\in(0,h_n)$ şi $k'_n,k''_n\in(0,k_n)$ astfel încât relaţia (4.13) să aiba loc, adică

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x+h'_n,y+k'_n)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x+h''_n,y+k''_n) \tag{4.14}$$

Datorită continuităţii derivatelor parţiale de ordinul doi, relaţia (4.14) se păstrează şi prin trecere la limită, deci avem

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)} \tag{4.15}$$

Cum punctul $(x,y)\in E$ a fost arbitrar ales, rezultă că relaţia (4.15) este adevărată pe întreaga mulţime E.

5.5. Matricea funcţională Jacobi

Fie funcţia $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f=(f_1,f_2,...,f_m)$ unde E este o mulţime deschisă.

Prin matrice funcţională Jacobi pe mulţimea E, notată J(x) sau $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}}$, înţelegem matricea cu m linii şi n coloane definită astfel:

$$J(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

Dacă n=1 iar $m>1$, matricea funcțională Jacobi este o matrice coloană

$$J(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) \\ \dots. \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

De asemenea, dacă m=1 şi $n>1$, matricea funcțională Jacobi este o matrice linie.

$$J(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

In cazul m=n obținem o matrice pătratică

$$J(x)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

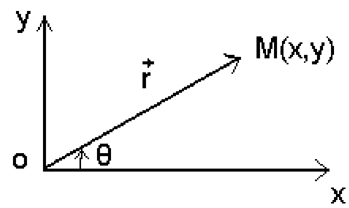
Determinantul acestei matrici pătratice notat

$$\det J(x)=\frac{D(f_1,f_2,\dots,f_n)}{D(x_1,x_2,\dots,x_n)} \tag{5.5}$$

se numeşte <u>jacobianul funcției f</u> pe mulțimea E

<u>Exemple:</u> **---**

1) Pentru funcția vectorială $\vec{r}: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită cu ajutorul coordonatelor polare (ρ,θ)



Unde $\rho = \|\vec{r}\|$,

$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j}$

matricea funcțională Jacobi este

$$J(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

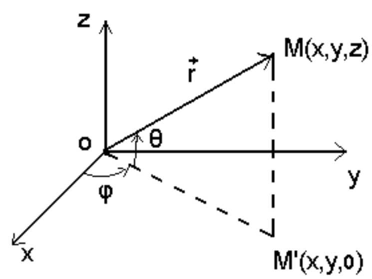
iar determinantul ei are valoarea:

$$\boxed{\det J(\rho, \theta) = \rho}$$

2) Pentru funcția vectorială $\vec{r} : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită cu ajutorul coordonatelor sferice (ρ, θ, φ)

Unde $\rho = \|\vec{r}\|$,

$\vec{r}(\rho, \theta, \varphi) = \rho\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \rho\sin\theta\,\vec{k}$

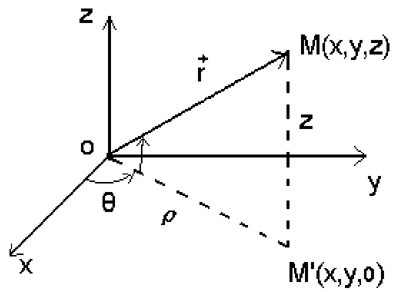


matricea funcțională Jacobi este

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

iar $\det J(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \cos\theta$

3) Pentru funcția vectorială $\vec{r}: E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită cu ajutorul coordonatelor cilindrice (ρ, θ, z)



$$\vec{r}(\rho,\theta,z) = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} + z\vec{k}$$

matricea funcțională Jacobi este

$$J(\rho,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar $\boxed{\det J(\rho,\theta,z) = \rho}$

-- 🕮

5.6. Câmpuri scalare şi câmpuri vectoriale din ∇^3

Conceptul de câmp stă la baza unor noțiuni importante din fizica modernă. Se au în vedere câmpurile scalare, câmpurile vectoriale sau câmpurile tensoriale, care sunt utilizate frecvent în electrodinamică, mecanică, teoria particulelor elementare, în teoria relativității.

Dacă o mărime fizică are o valoare determinată în fiecare punct al spațiului sau al unei regiuni din spațiu, atunci se spune că este definit câmpul mărimii considerate.

Dacă mărimea respectivă este un scalar (temperatură, presiune, potențial electrostatic), atunci şi câmpul ei se numeşte câmp scalar. Dacă mărimea considerată este un vector (viteză, forță) atunci câmpul determinat de ea se numeşte câmp vectorial.

De exemplu, un corp încălzit dă un câmp scalar al temperaturii dacă în fiecare punct al câmpului temperatura are o valoare bine determinată. Asemănător, putem da numeroase exemple de câmpuri vectoriale:

câmpul vitezelor sau accelerațiilor unui fluid în mişcare, câmpul gravitațional sau câmpul magnetic al diverselor corpuri.

Definitie:

Dacă $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$**,** $f \in C^1(E)$**, E deschisă, este o funcție scalară, se numeşte <u>câmp scalar</u> sistemul**

$$(E, f(M)),\ M = (x, y, z) \in E \qquad \textbf{(6.1)}$$

<u>Observații</u>:---

a) Prin <u>câmp scalar</u> se înțelege domeniul E împreună cu funcția reală f(M) definită pe E. Adesea, pentru simplificarea exprimării, prin expresia “<u>câmpul scalar</u> <u>f</u>” se înțelege funcția scalară f.

b) Punctele $M \in E$ se numesc <u>punctele câmpului scalar</u>, iar numărul $|f(M)|$ se numeşte <u>valoarea</u> (intensitatea, mărimea) <u>câmpului scalar în punctul M</u>.

--

<u>Definiție</u>:

Dacă $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^3 \to V_3$**, E deschisă,** $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$**,** $f \in C^1(E)$**, este o funcție vectorială, se numeşte <u>câmp vectorial</u> sistemul**

$$\left(E, \vec{f}(M)\right),\ M = (x, y, z) \in E \qquad \textbf{(6.2)}$$

<u>Observații</u>:---

a) Şi în acest caz prin expresia “<u>câmpul vectorial</u> $\vec{f}$” se înțelege <u>funcția vectorială</u> $\vec{f}$.

b) Punctele $M \in E$ se numesc <u>punctele câmpului vectorial</u>, iar numărul $\|f(M)\|$ se numeşte <u>valoarea</u> (intensitatea, mărimea) <u>câmpului vectorial în punctul M</u>.

c) In baza canonică din V_3, funcția vectorială $\vec{f}$ se poate exprima

$$\vec{f}(M) = f_1(M)\vec{i} + f_2(M)\vec{j} + f_3(M)\vec{k} \qquad (6.3)$$

unde f_1, f_2, f_3 sunt componentele sale reale în această bază.

--

Definiție:

Se numeşte **gradientul funcției scalare** $f:E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ **în punctul** $M\in E$ **vectorul notat**

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(M)=\frac{\partial f}{\partial x}(M)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(M)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(M)\vec{k} \qquad \textbf{(6.4)}$$

Astfel, câmpul scalar $(E,f(M))$ i se asociază câmpul vectorial $\left(E,\overrightarrow{\text{grad}}\ f(M)\right)$ care poartă numele de gradientul câmpului scalar, căci în fiecare punct M al câmpului scalar $(E,f(M))$ putem defini vectorul $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(M)$.

Definiție:

Câmpul vectorial $\left(E,\vec{f}(M)\right)$ **este un câmp potențial, dacă el este gradientul unui câmp scalar** $(E,U(M))$**, deci dacă**

$$\vec{f}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\ U(M),\quad M\in E \qquad \textbf{(6.5)}$$

In acest caz, funcția scalară $U:E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ se numeşte potențialul câmpului.

Fie funcția vectorială $\vec{f}:E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $\vec{f}=[f_1,f_2,f_3]$.

Definiție:

Se numeşte **divergența funcției** $\vec{f}:E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ **în punctul** $M\in E$**, numărul notat**

$$\text{div}\ \vec{f}(M)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(M)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(M)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(M) \qquad \textbf{(6.6)}$$

Astfel, câmpului vectorial $\left(E,\vec{f}(M)\right)$ i se asociază câmpul scalar $\left(E,\text{div}\ \vec{f}(M)\right)$ care se numeşte divergența câmpului vectorial.

Introducând operatorul lui Laplace care aplicat unei funcții scalare $\vec{f}:E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ o duce în funcția Δf

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \qquad (6.7)$$

se poate demonstra

Propoziția 1:

Dacă $\left(E,\vec{f}(M)\right)$ este un câmp potențial, atunci $\operatorname{div}\ \vec{f} = \Delta U$ unde funcția scalară U este potențialul câmpului.

Intr-adevăr, deoarece $\vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ U$, rezultă $\vec{f} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$.

Atunci

$$\operatorname{div}\ \vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U$$

Definiție:

Se numeşte <u>câmp solenoidal</u>, un câmp vectorial cu divergență nulă.

Definiție:

Se numeşte <u>rotorul funcției</u> $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **în punctul** $M \in E$**, vectorul notat**

$$\operatorname{rot}\ \vec{f}(M) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(M) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(M)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}(M) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(M)\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(M) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(M)\right)\vec{k} \quad \textbf{(6.8)}$$

Astfel, câmpului vectorial $\left(E,\vec{f}(M)\right)$ i se asociază câmpul vectorial $\left(E,\operatorname{rot}\ \vec{f}(M)\right)$ care se numeşte <u>rotorul câmpului vectorial</u>.

Pentru scrierea rotorului, se obişnuieşte să se utilizeze determinantul simbolic

$$\operatorname{rot}\ \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \qquad (6.9)$$

unde $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ sunt versorii axelor carteziene OX, OY, OZ, iar operatorii de derivare parțială $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ se subânțeleg aplicabili funcțiilor din ultima linie utilizându-se regula de dezvoltare a unui determinant după prima linie.

De exemplu, pentru funcția
$\vec{f}(x,y,z) = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xyz\vec{j} + ze^x\vec{k}$, avem

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y^2 & 2xyz & ze^x \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(ze^x\right) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right]\vec{i} +$$

$$+\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(ze^x\right)\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xyz) - \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right)\right]\vec{k} =$$
$$= -2xy\vec{i} + ze^x\vec{j} + (2yz - 2y)\vec{k}$$

<u>Propoziția 2</u>

Un câmp vectorial este câmp potențial de clasă C^2, dacă şi numai dacă rotorul său este identic nul.

Intr-adevăr, dacă $\left(E, \vec{f}(M)\right)$ este câmp potențial, atunci $(\exists)$ $U : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $U \in C^2(E)$ astfel ca $\vec{f} = \overrightarrow{\operatorname{graf}}\ U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

$$\operatorname{rot} \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} & \dfrac{\partial U}{\partial y} & \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}\right]\vec{i} + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right]\vec{j} + \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}\right]\vec{k} = 0$$

deoarece derivatele parțiale mixte sunt egale.

In teoria câmpurilor se foloseşte operatorul $\vec{\nabla}$ (nabla) ca un vector simbolic, definit prin

$$\boxed{\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}} \tag{6.10}$$

Cele trei operații posibile cu vectorii din $\mathbb{R}^3$ conduc la următoarele rezultate:

- ***<u>Inmulțirea cu scalari:</u>*** Dacă $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(E)$, se notează $\vec{\nabla} f$ operația de inmulțire cu scalari obținându-se

$$\vec{\nabla} f = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right] f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \overrightarrow{\text{grad}}\ f$$

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\ f = \vec{\nabla} f} \tag{6.11}$$

- ***Produsul scalar:*** Dacă $\vec{f} : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{f} = [f_1, f_2, f_3]$, $\vec{f} \in C^1(E)$, atunci notând $\langle \vec{\nabla}, \vec{f} \rangle$ produsul scalar în cauză, se deduce

$$\langle \vec{\nabla}, \vec{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), (f_1, f_2, f_3) \right\rangle = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = \text{div}\ \vec{f} = \vec{\nabla} \vec{f}$$

$$\boxed{\text{div}\ \vec{f} = \vec{\nabla} \vec{f}} \tag{6.12}$$

- ***Produsul vectorial:*** Dacă notăm $\vec{\nabla} \times \vec{f}$ produsul vectorial al vectorului simbolic $\vec{\nabla}$ cu $\vec{f}$, obținem:

$$\vec{\nabla} \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \text{rot}\ \vec{f}$$

deci

$$\boxed{\text{rot}\ \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f}} \tag{6.13}$$

5.7. Exerciții rezolvate

1) Să se determine unghiul format de gradientele funcției $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \ln \frac{y}{x}$ în punctele $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ şi $B(1,1)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} = -\frac{1}{x} \vec{i} + \frac{1}{y} \vec{j}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -2\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(1,1) = -\vec{i} + \vec{j}$$

Ştim că unghiul dintre aceşti doi vectori se determină din

$$\cos\alpha = \frac{\left\langle \overrightarrow{\text{grad}}\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \overrightarrow{\text{grad}}\ f(1,1) \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{\text{grad}}\ f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \right\| \cdot \left\| \overrightarrow{\text{grad}}\ f(1,1) \right\|} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

2) Să se calculeze divergența şi rotorul câmpului determinat de funcția $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

$$\vec{f}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$$

$$\operatorname{div}\ \vec{f}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{y^2-x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

$$\operatorname{rot}\ \vec{f}(x,y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\ \vec{f}(x,y) = -\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\vec{k}$$

3) Fie un corp de masă <u>m</u> situat în punctul $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$; conform cu legea atracției newtoniene, forța de atracție exercitată de acest corp asupra unui alt corp având masa unitate situată în punctul $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ va fi

$$\vec{f}(x,y,z) = km\left[\frac{x-x_0}{\|\vec{r}\|^3}\vec{i} + \frac{y-y_0}{\|\vec{r}\|^3}\vec{j} + \frac{z-z_0}{\|\vec{r}\|^3}\vec{k}\right]$$

unde

$$\|\vec{r}\|^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

Să se arate că această forță determină un câmp potențial şi solenoidal.

Este suficient să arătăm că rotorul şi divergența câmpului sunt nule.

$$\operatorname{rot}\ \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ km\frac{x-x_0}{\|\vec{r}\|^3} & km\frac{y-y_0}{\|\vec{r}\|^3} & km\frac{z-z_0}{\|\vec{r}\|^3} \end{vmatrix} =$$

$$= km\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z-z_0}{\|\vec r\|^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y-y_0}{\|\vec r\|^3}\right)\right]\vec i + km\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-x_0}{\|\vec r\|^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z-z_0}{\|\vec r\|^3}\right)\right]\vec j +$$

$$+ km\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-y_0}{\|\vec r\|^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-x_0}{\|\vec r\|^3}\right)\right]\vec k = 0\vec i + 0\vec j + 0\vec k = 0$$

$$\operatorname{div}\ \vec f = km\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{\|\vec r\|^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{\|\vec r\|^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{\|\vec r\|^3}\right)\right]=0$$

4) Pentru funcția $\vec f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec f \in C^2(E)$ să se arate că are loc egalitatea.

$$\operatorname{rot}\ (\operatorname{rot}\ \vec f) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ (\operatorname{div}\ \vec f) - \Delta \vec f$$

$$\operatorname{rot}\ \vec f = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot}\ \vec f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\vec k$$

$$\operatorname{rot}\ (\operatorname{rot}\ \vec f) = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\right]\vec i + \ldots =$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x}+\frac{\partial^2 f_3}{\partial z \partial x}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}\right]\vec i + \ldots =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)-\Delta f_1\right]\vec i + \ldots =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{div}\ \vec f\right)-\Delta f_1\right]\vec i + \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{div}\ \vec f\right)-\Delta f_2\right]\vec j +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{div}\ \vec f\right)-\Delta f_3\right]\vec k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\operatorname{div}\ \vec f\right)\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{div}\ \vec f\right)\vec j +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(\operatorname{div}\ \vec{f}\right)\vec{k}-\left[\Delta f_1\vec{i}+\Delta f_2\vec{j}+\Delta f_3\vec{k}\right]=\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ \left(\operatorname{div}\ \vec{f}\right)-\vec{\Delta f}$$

5) Pentru funcția $f: E\subset \mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f\in C^2(E)$ să se arate că

$$\operatorname{div}\ (f\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f)=f\cdot\Delta f+(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f)^2$$

$$f\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f=f\left[\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right]$$

$$\operatorname{div}\ \left(f\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(f\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(f\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2+f\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=$$

$$=f\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=$$

$$=f\Delta f+\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ f\right)^2$$

6) Să se verifice egalitățile:

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ (uv)=u\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ v+v\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ u$$

$$\operatorname{div}\ (u\vec{f})=\vec{f}\ \overrightarrow{\operatorname{grad}}\ u+u\ \operatorname{div}\ \vec{f}$$

$$\operatorname{rot}\ (u\vec{f})=u\ \operatorname{rot}\ \vec{f}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\ u\times\vec{f}$$

$$\operatorname{div}\ (\vec{f}\times\vec{g})=\vec{g}\ \operatorname{rot}\ \vec{f}-\vec{f}\ \operatorname{rot}\ \vec{g}$$

unde $u,v: E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad u,v\in C^1(E)$

$\vec{f},\vec{g}: E\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\quad \vec{f},\vec{g}\in C^1(E)$

Identitățile se verifică prin calcul direct.

CAPITOLUL VI

DIFERENȚIALA FUNCȚIILOR VECTORIALE

6.1. Diferențiala unei funcții reale de o variabilă reală

Noțiunea de diferențială a unei funcții într-un punct a apărut din necesitatea de aproximare a funcției în acel punct.

Să considerăm funcția $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ şi o vecinătate a lui x_0, $V(x_0)\subset[a,b]$.

Definiție:

Spunem că funcția f este diferențiabilă în punctul x_0, dacă există un număr $c\in\mathbb{R}$ şi o funcție $\omega:V(x_0)\to\mathbb{R}$, continuă şi nulă în x_0 astfel încât pentru orice $x\in V(x_0)$ creşterea funcției, $f(x)-f(x_0)$, corespunzătoare creşterii $x-x_0$ a variabilei independente să se exprime prin

$$\boxed{f(x)-f(x_0)=c(x-x_0)+\omega(x)(x-x_0)} \tag{1.1}$$

Deoarece funcția ω este continuă şi nulă în punctul x_0, avem

$$\lim_{x\to x_0}\omega(x)=\omega(x_0)=0 \tag{1.2}$$

Definiție:

Funcția f este diferențiabilă pe intervalul $(a,b)\subset\mathbb{R}$, dacă este diferențiabilă în orice punct $x\in(a,b)$.

Propoziție:

Funcția f este diferențiabilă în punctul $x_0\in(a,b)$ dacă şi numai dacă este derivabilă în acest punct.

Demonstrație:

"$\Rightarrow$" Dacă f este diferențiabilă în x_0 atunci pentru $(\forall)$ $x\in V(x_0)$ avem

$f(x)-f(x_0)=c(x-x_0)+\omega(x)(x-x_0)$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$.

Pentru $x \neq x_0$ putem scrie

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c + \omega(x)$$

şi prin trecere la limită avem

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c + \lim_{x\to x_0} \omega(x)$$

adică

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$$

deci f este derivabilă în x_0 şi $\underline{f'(x_0) = c}$.

"$\Leftarrow$" Reciproc, să presupunem că f este derivabilă în x_0. Înseamnă că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

Definim funcția $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ astfel

$$\omega(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & , \quad x \neq x_0 \\ 0 & , \quad x = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Putem afirma că această funcție este continuă şi nulă în x_0, deoarece

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x) = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right] = 0 = \omega(x_0)$$

Din definiția (1.3) a funcției ω rezultă că pentru $x \neq x_0$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + \omega(x)(x-x_0)$$

Această egalitate este adevărată şi pentru $x = x_0$, deci funcția f este diferențiabilă în punctul x_0.

Observații:---

1) Din demonstrația acestei propoziții, rezultă că funcția f este diferențiabilă în $x_0 \in (a,b)$ dacă şi numai dacă pentru orice $x \in V(x_0)$ avem

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \qquad (1.4)$$

unde $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$

2) Propoziția precedentă afirmă că noțiunile de derivabilitate şi diferențiabilitate sunt echivalente, în sensul că dacă funcția are una dintre proprietăți, atunci are şi celalată proprietate.

3) Egalitatea (1.4) se poate scrie

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \omega(x)](x - x_0)$$

şi avem

$$\lim_{x \to x_0} [f'(x_0) + \omega(x)] = f'(x_0)$$

Prin urmare, pentru valori ale lui $\underline{x}$ suficient de apropiate de x_0, avem

$$f'(x_0) + \omega(x) \approx f'(x_0) \qquad (1.5)$$

<u>deci creşterea f(x) – f(x_0) a funcției f corespunzătoare creşterii x-x_0 a variabilei independente poate fi aproximată cu primul termen din (1.4).</u>

$$\boxed{f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0)} \qquad (1.6)$$

pentru $x \approx x_0$

Notăm cu h creşterea de la $\underline{x_0}$ la $\underline{x}$ a variabilei independente, $h = x - x_0$. Atunci pentru <u>h</u> suficient de mic şi $x = x_0 + h \in V(x_0)$ avem

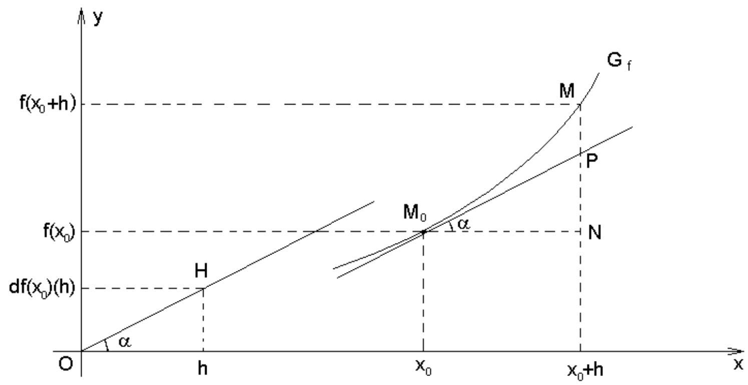
$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h \qquad (1.7)$$

<u>Definiție:</u>

Funcția liniară notată <u>df(x_0)</u> care asociază unui număr $h \in \mathbb{R}$, numărul $f'(x_0) \cdot h \in \mathbb{R}$ se numeşte <u>diferențiala funcției f în punctul x_0</u> şi este definită de:

$$\boxed{df(x_0)(h) = f'(x_0)h} \qquad (1.8)$$

Trebuie observat că, în timp ce derivata funcției f în x_0 este un număr, $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, diferențiala funcției f în x_0 este o funcție liniară definită pentru orice $h \in \mathbb{R}$.



-Figura 1-

Graficul diferențialei $df(x_0)$ este o dreaptă ce trece prin origine şi are coeficientul unghiular $tg(\alpha) = f'(x_0)$. Această dreaptă este în mod evident paralelă cu tangenta în punctul $M_0(x_0, f(x_0))$ la graficul funcției f (Fig. 1).

De aici rezultă interpretarea geometrică a diferențialei. Avem:

$MN = f(x_0 + h) - f(x_0)$

$NP = df(x_0)(h)$

Relația de aproximare

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h) \tag{1.9}$$

exprimă faptul că segmentul PM poate fi făcut oricât de mic, dacă se ia creşterea h suficient de mică.

Dacă funcția f este diferențiabilă pe intervalul (a,b), atunci diferențiala ei într-un punct $x \in (a,b)$ este

$$df(x)(h) = f'(x)h, \quad h \in \mathbb{R} \tag{1.10}$$

Fie funcția identică $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x$. Cum $\varphi'(x) = 1$, diferențiala ei pe (a,b) este

$$d\varphi(x)(h) = h, \quad h \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

Dacă folosim diferențialele funcțiilor f şi φ în punctul x_0, avem:

$$\frac{df(x_0)(h)}{d\varphi(x_0)(h)} = \frac{f'(x_0)\cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$\frac{df(x_0)(h)}{d\varphi(x_0)(h)} = f'(x_0) \qquad (1.12)$$

Pentru un punct arbitrar $x \in (a,b)$ relația (1.12) se scrie simplu

$$\frac{df(x)}{d\varphi(x)} = f'(x) \qquad (1.13)$$

Pentru diferențiala funcției identice $\varphi(x) = x$ se foloseşte notația <u>dx</u> şi se numeşte diferențiala lui x, iar (1.13) devine

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \qquad (1.14)$$

de unde se deduce

$$\boxed{df(x) = f'(x)dx} \qquad (1.15)$$

adică <u>diferențiala funcției f este produsul dintre derivata sa şi diferențiala lui x.</u>

Pentru simplitate, se foloseşte şi notația

$$df = f' \cdot dx \qquad (1.16)$$

<u>6.2. Diferențiala unei funcții reale de n variabile reale</u>

Prin analogie cu cazul unei funcții $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom introduce noțiunea de diferențiabilitate pentru o funcție de mai multe variabile.

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punct $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in \overset{o}{E}$ şi o vecinătate a lui x_0, $V(x_0) \subset E$.

<u>Definiție:</u>

Spunem că <u>funcția f este diferențiabilă Fréchet în x_0</u>, dacă există o aplicație liniară $\lambda : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi o funcție $\omega : V(x_0) \subset E \to \mathbb{R}$ astfel ca:

a) funcția ω este continuă şi nulă în x_0, adică $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$

b) pentru orice $x \in V(x_0)$ avem

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = \lambda(x - x_0) + \omega(x)\|x - x_0\|} \qquad (2.1)$$

Cum aplicația liniară $\lambda : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se defineşte prin

$$\lambda(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\ , \quad c_k \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

condiția (2.1) se poate scrie

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1} c_k (x_k - x_{0k}) + \omega(x)\|x - x_0\|} \tag{2.3}$$

Dacă notăm $c = (c_1, c_2, \ldots c_n) \in \mathbb{R}^n$, vector constant şi facem observația că

$$\langle c, x - x_0 \rangle = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{0k}) \tag{2.4}$$

atunci condiția (2.1) se poate exprima şi sub forma

$$\boxed{f(x) - f(x_0) = \langle c, x - x_0 \rangle + \omega(x)\|x - x_0\|} \tag{2.5}$$

Relațiile (2.1), (2.3) şi (2.5) dau creşterea f(x) – f(x_0) a funcției f corespunzătoare creşterii x – x_0 a variabilei independente.

Definiție:

Spunem că funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet pe mulțimea deschisă E, dacă ea este diferențiabilă Fréchet în fiecare punct al acestei mulțimi.

Proprietății ale funcțiilor diferențiabile Fréchet

1) Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, şi $x_0 \in \overset{o}{E}$.

Dacă funcția f este diferențiabilă Fréchet în punctul x_0, atunci ea admite derivate parțiale în acest punct şi $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = c_k$ pentru $k = \overline{1,n}$.

Astfel putem spune că vectorul constant $c \in \mathbb{R}^n$

$$c = \text{grad } f(x_0) \tag{2.6}$$

iar condiția (2.5) se scrie

$$f(x) - f(x_0) = \langle \text{grad } f(x_0), x - x_0 \rangle + \omega(x)\|x - x_0\| \tag{2.7}$$

sau

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k}) + \omega(x)\|x - x_0\| \qquad (2.8)$$

Demonstrație:
Dacă f este diferențiabilă Fréchet în x_0, atunci pentru orice $x \in V(x_0)$ putem scrie

$$f(x) - f(x_0) = \langle c, x - x_0 \rangle + \omega(x)\|x - x_0\|$$

unde $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$

Fie $h \in \mathbb{R}$ astfel încât $x = x_0 + h\vec{e}_k \in V(x_0)$, $\left\|\vec{e}_k\right\| = 1$

Relația precedentă se scrie

$$f(x_0 + h\vec{e}_k) - f(x_0) = \left\langle c, h\vec{e}_k \right\rangle + \omega(x_0 + h\vec{e}_k)\left\|h\vec{e}_k\right\|$$

sau

$$f(x_0 + h\vec{e}_k) - f(x_0) = hc_k + |h|\omega(x_0 + h\vec{e}_k)$$

Dacă calculăm limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\vec{e}_k) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0}\left[c_k + \frac{|h|}{h}\omega(x_0 + h\vec{e}_k)\right]$$

obținem

$$c_k = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_{01}, \ldots, x_{0k} + h, \ldots, x_{0n}) - f(x_{01}, \ldots, x_{0k}, \ldots, x_{0n})}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$$

Corolar: Dacă funcția f este diferențiabilă Fréchet pe mulțimea deschisă E, atunci ea are derivate parțiale pe această mulțime.

Observație:---
Reciproca nu este totdeauna adevărată.

De exemplu funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

are derivate parțiale în origine, dar nu este diferențială Fréchet în acest punct.

Într-adevăr,

din $f(x,0)=0$ rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$

din $f(0,y)=0$ rezultă $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0 \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

prin urmare funcția are derivate parțiale în origine.

Pentru a demonstra că f nu este diferențiabilă în origine, este suficient să arătăm că ea nu poate fi pusă sub forma (2.8)

Pentru $(x,y)\neq(0,0)$ avem

$$f(x,y)-f(0,0)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)+$$

$$+\frac{xy}{x^2+y^2}\underbrace{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

În cazul acesta avem

$$\omega(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

dar această funcție nu este continuă în origine deoarece nu are limită în acest punct.

> 2) Dacă funcția $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet în $x_0\in\overset{o}{E}$, atunci ea este continuă în acest punct.

Demonstrație

Dacă f este diferențiabilă Fréchet în $x_0\in\overset{o}{E}$, atunci pentru orice $x\in V(x_0)$ avem

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k-x_{0k})+\omega(x)\|x-x_0\|$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0}\omega(x)=\omega(x_0)=0$

Calculăm

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k}) + \omega(x) \|x - x_0\| \right] = 0$$

de unde $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, deci f este continuă în x_0.

<u>Corolar:</u> Dacă funcția f este diferențiabilă Fréchet pe mulțimea deschisă E, atunci ea este continuă pe această mulțime.

Reciproca nu este totdeauna adevărată.

3) Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul întâi (în raport cu toate variabilele sale) într-o vecinătate (din E) a punctului $x_0 \in \overset{o}{E}$ şi dacă aceste derivate sunt continue în x_0, atunci funcția f este diferențiabilă Fréchet în x_0.

<u>Demonstrație</u>

Pentru fiecare punct $x = (x_1, ..., x_n) \in V(x)$ aplicăm formula lui Lagrange funcției f de <u>n</u> variabile

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \sum_{k=1}^{n} (x_{01}, ..., x_{0k-1}, \xi_k, x_{k+1}, ..., x_n)(x_k - x_{0k}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} [\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \omega_k(x)](x_k - x_{0k}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

unde $\xi_k \in (x_{0k}, x_k)$ cu $k = \overline{1,n}$

iar funcțiile

$$\omega_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{01}, ..., \xi_k, ..., x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{01}, ..., x_{0k}, ..., x_{0n}) \tag{2.10}$$

sunt continue şi nule în x_0 deoarece dacă $x \to x_0$ atunci $x_k \to x_{0k}$ (pt $k = \overline{1,n}$) prin urmare şi $\xi_k \to x_{0k}$. De asemenea, funcțiile

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{01}, ..., \xi_k, ..., x_n) \to \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_{01}, ..., x_{0k}, ..., x_{0n})$$

fiind funcții continue.

Expresia (2.9) este o formă a condiției de diferențiabilitate.

Corolar: Dacă derivatele parțiale ale funcției $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ există şi sunt continue pe mulțimea E, atunci f este diferențiabilă Fréchet pe această mulțime.

Observație:--

Reciproca nu este totdeauna adevărată căci există funcții diferențiabile într-un punct ale căror derivate parțiale să nu fie funcții continue în acel punct.

De exemplu funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

*) Arătăm că funcția f este diferențiabilă Fréchet în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, adică pentru $(x,y) \in V(0,0)$ putem scrie

$$\begin{aligned} & f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + \\ & + \omega(x,y)\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Într-adevăr,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{|x|}}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{y^2 \sin\frac{1}{|y|}}{y} = 0$$

iar relația

$$\omega(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

este continuă şi nulă în $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

**) Arătăm că derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu sunt funcții continue în origine

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Aceste derivate parțiale nu au limită în origine şi deci cu atât mai mult nu sunt continue în origine deoarece funcțiile $\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ şi $\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ nu au limită în acest punct.

----

4) Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ are derivate parțiale de ordinul întâi într-o vecinătate a punctului $x_0 \in \overset{o}{E}$ $(V(x_0))$ şi dacă aceste derivate sunt diferențiabile în x_0, atunci derivatele parțiale mixte există în x_0 şi sunt egale. (W. Young)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) \qquad i \neq j$$

Observație:---

Proprietatea este valabilă şi pentru derivate parțiale de ordin superior.

Dacă derivatele parțiale de ordin $n-1$ există în $V(x_0)$ (pe E) şi dacă acestea sunt diferențiabile în x_0 (pe E), atunci există toate derivatele parțiale de ordin n în x_0 (pe E), iar derivatele parțiale mixte, care diferă numai prin ordinea de derivare sunt egale în x_0 (pe E).

Creşterea funcției f în x_0 exprimată prin relația (2.8)

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k}) + \omega(x)\|x - x_0\|$$

este dată de suma a doi termeni. Se observă că atunci când $x \to x_0$, primul termen tinde liniar către zero, iar al doilea termen tinde către această valoare mult mai rapid. Prin urmare, putem afirma că pentru valori $x \in V(x_0)$ foarte apropiate de x_0, creşterea funcției f poate fi aproximată cu primul termen, adică

$$f(x) - f(x_0) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k}) \qquad (2.12)$$

Definiție:

Funcția liniară $\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})$ **se numeşte** **diferențiala funcției f în** x_0 **şi se notează** $df(x_0)$. **Ea este o funcție definită pe tot spațiul** $\mathbb{R}^n$ **deoarece diferențele** $x_k - x_{0k}$ **sunt definite prin orice** $x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$.

$$\boxed{df(x_0)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})} \qquad 2.13)$$

Putem da o exprimare mai simplă a diferențialei dacă notăm

$h = x - x_0 \in \mathbb{R}^n$

$h_k = x_k - x_{0k} \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1,n}$

$$df(x_0)(h) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)h_k \qquad (2.14)$$

Dacă f este diferențiabilă Fréchet în orice punct al mulțimii deschise E, atunci diferențiala într-un punct $x \in E$ este

$$df(x)(h) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k \qquad (2.15)$$

Cu ajutorul funcțiilor

$\varphi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\varphi_j(x_1,...,x_n) = x_j \qquad j = \overline{1,n}$

ale căror diferențiale sunt

$$d\varphi_j(x)(h) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(x)h_k = h_j \qquad (2.16)$$

dacă notăm $d\varphi_j(x)(h) = dx_j$, atunci diferențiala funcțiiei f pe mulțimea E se scrie

$$\boxed{df(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx_k} \qquad (2.17)$$

Dacă definim operatorul diferențial de ordinul întâi

$$\boxed{d = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k} \qquad (2.18)$$

atunci pentru expresia (2.17) a diferențialei putem reține scrierea formală

$$\boxed{df = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} dx_k\right] f} \tag{2.19}$$

unde interpretăm (în mod formal) pe ∂f ca un produs "simbolic" între ∂ şi f.

Fie $f, g : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f şi g diferențiabile Fréchet pe E (deschisă).

Folosind definiția (2.17) a diferențialei, cu uşurință se pot pune în evidență următoarele <u>reguli</u> <u>de</u> <u>diferențiere</u>.

$$d(\alpha f + \beta g) = \alpha df + \beta dg \qquad \text{unde} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg \tag{2.20}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2} \qquad \text{unde } g(x) \neq 0 \text{ pe } E$$

<u>6.3. Diferențiala unei funcții vectoriale</u>

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ...f_m)$ vectorul $x_0 = (x_{01}, ..., x_{0n}) \in \overset{o}{E}$ şi o vecinătate $V(x_0) \in E$.

<u>**Definiție:**</u>

Funcția <u>f este diferențiabilă Fréchet în x_0</u> dacă există <u>n</u> vectori $c_k = (c_{1k}, c_{2k}, ..., c_{mk}) \in \mathbb{R}^m$ şi o funcție vectorială $\omega : V(x_0) \to \mathbb{R}^m$ continuă şi nulă în x_0 astfel încât pentru orice $x \in V(x_0)$ să avem:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k - x_{0k}) + \omega(x)\|x - x_0\| \tag{3.1}$$

Trebuie să observăm că (3.1) este o relație vectorială echivalentă cu <u>n</u> relații scalare

$$f_i(x) - f_i(x_0) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} (x_k - x_{0k}) + \omega_i(x)\|x - x_0\| \tag{3.2}$$

pentru $i = \overline{1, m}$.

În cazul de față numerele reale c_{ik} sunt

$$c_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x_0), \quad i = \overline{1,m}\ ,\ k = \overline{1,n} \tag{3.3}$$

Dacă această funcție este diferențiabilă Fréchet pe întreaga mulțime E (deschisă), atunci diferențiabila ei este o funcție vectorială

$df(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$df(x) = (df_1(x),...,df_m(x))$

definită de relația vectorială

$$\boxed{df(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)dx_k} \tag{3.4}$$

sau de cele $\underline{m}$ relații scalare

$$\boxed{df_i(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)dx_k\ , \quad i = \overline{1,m}} \tag{3.5}$$

Se arată că $df(x)$ există pe E $\Leftrightarrow$ $df_1(x),...,df_m(x)$ există pe E.

Fie funcțiile vectoriale

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2,..., f_m)$,

$g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, $\quad g = (g_1, g_2,..., g_p)$,

$h = g \circ f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\quad h = (h_1, h_2,..., h_p)$

Fie de asemenea $x_0 \in \overset{o}{E}$ şi $y_0 = f(x_0) \in \overset{o}{F}$

<u>Propoziție:</u>

Dacă funcția f este diferențiabilă Fréchet în x_0 şi funcția g este diferențiabilă Fréchet în y_0, atunci funcția compusă h este diferențiabilă Fréchet în x_0 şi avem

$$dh(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial f_k}(y_0)df_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0)dx_i \tag{3.6}$$

Această relație exprimă <u>proprietatea de invarianță a diferențialei față de operația de compunere a funcțiilor</u>.

Demonstrație: pentru simplitate, vom face demonstrația numai pentru cazul funcțiilor de două variabile şi anume

$f : E \subset \mathbb{R}^2 \to F \subset \mathbb{R}^2, \quad f = (f_1, f_2)$

$g : F \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \overset{o}{E}$

$y_0 = f(x_0) = (y_{01}, y_{02}) \in \overset{o}{F}$

De asemenea, pentru diferențiabilitate, vom folosi o formulare echivalentă a definiției cunoscute.

*) Din f diferențiabilă Fréchet în $x_0 \Rightarrow f_1$ şi f_2 diferențiabile Fréchet în $x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ există funcțiile $\omega_1,\ \omega_2 : V(x_0) \subset E \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim\limits_{x \to x_0} \omega_1(x) = \omega_1(x_0) = 0$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} \omega_2(x) = \omega_2(x_0) = 0$ astfel încât pentru orice $x \in V(x_0)$ să putem scrie

$$\begin{aligned} f_1(x) - f_1(x_0) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \\ &+ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) + \omega_1(x)\|x - x_0\| \\ f_2(x) - f_2(x_0) &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) + \omega_2(x)\|x - x_0\| \end{aligned} \tag{3.6}$$

**) Din g diferențiabilă Fréchet în $y_0 \in \overset{o}{F} \overset{(def)}{\Rightarrow}$ există funcțiile $\omega_3,\ \omega_4 : V^*(y_0) \subset F \to \mathbb{R}$ cu proprietatea $\lim\limits_{y \to y_0} \omega_3(y) = \omega_3(y_0) = 0$ şi $\lim\limits_{y \to y_0} \omega_4(y) = \omega_4(y_0) = 0$ astfel încât pentru orice $y \in V^*(y_0)$ să putem scrie

$$\begin{aligned} g(y) - g(y_0) &= \left[\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_0) + \omega_3(y)\right](y_1 - y_{01}) + \\ &+ \left[\frac{\partial g}{\partial y_2}(x_0) + \omega_4(y)\right](y_2 - y_{02}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

***) Scriem creşterea funcției compuse h ținând seama de rezultatele (3.6) şi (3.7)

$h(x) - h(x_0) = g(f_1(x), f_2(x)) - g(f_1(x_0), f_2(x_0)) =$

$$= g(y_1, y_2) - g(y_{01}, y_{02}) \overset{(3.7)}{=} \left[\frac{\partial g}{\partial f_1}(y_0) + \omega_3(y)\right](f_1(x) - f_1(x_0)) +$$
$$+ \left[\frac{\partial g}{\partial f_2}(y_0) + \omega_4(y)\right](f_2(x) - f_2(x_0)) \overset{(3.6)}{=}$$
$$= \left[\frac{\partial g}{\partial f_1}(y_0) + \omega_3(y)\right]\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) + \omega_1(x)\|x - x_0\|\right] +$$
$$+ \left[\frac{\partial g}{\partial f_2}(y_0) + \omega_4(y)\right]\left[\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02}) + \omega_2(x)\|x - x_0\|\right]$$

Grupând convenabil termenii, obținem

$$h(x) - h(x_0) = \left[\frac{\partial g}{\partial f_1}(y_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial f_2}(y_0)\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0)\right](x_1 - x_{01}) +$$
$$+ \left[\frac{\partial g}{\partial f_1}(y_0)\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial f_2}(y_0)\frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0)\right](x_2 - x_{02}) + \tag{3.8}$$
$$+ \left[\text{grup cu termeni care tind la zero când } x \to x_0\right]$$

Dacă grupul termenilor ce tind la zero îl notăm $\omega(x)\|x - x_0\|$ cum $\lim_{x \to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$ atunci (3.8) exprimă diferențiabilitatea funcției h în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{E}$.

De asemenea, din rezultatele obținute anterior, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_0) = \dfrac{\partial g}{\partial f_1}(y_0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) + \dfrac{\partial g}{\partial f_2}(y_0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_2}(x_0) = \dfrac{\partial g}{\partial f_1}(y_0)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) + \dfrac{\partial g}{\partial f_2}(y_0)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

Dacă funcțiile f şi g sunt diferențiabile pe mulțimile deschise E respectiv F, atunci funcția compusă h este diferențiabilă pe E şi relațiile (3.9) se pot scrie simplu

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x_1} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} &= \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{aligned}} \tag{3.10}$$

Acestea precizează <u>formula de calcul pentru derivatele parțiale ale funcției compuse</u> h,
$h(x_1, x_2) = g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]$

De asemenea, diferențiala funcției compuse f pe mulțimea E este

$$dh = \left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)dx_2 \tag{3.11}$$

sau simplu scris

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial h}{\partial x_2}dx_2 \tag{3.12}$$

Dacă în (3.11) grupăm termenii astfel:

$$dh = \frac{\partial g}{\partial f_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}dx_2\right) + \frac{\partial g}{\partial f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}dx_2\right)$$

atunci obținem

$$dh = \frac{\partial g}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2}df_2 \tag{3.13}$$

Din (3.12) şi (3.13) reținem

$$\boxed{dh = \frac{\partial g}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2}df_2 = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2} \tag{3.14}$$

şi avem demonstrată proprietatea (3.6) de invarianță a diferențialei față de operația de compunere a funcțiilor. Totuşi trebuie să subliniem faptul că invarianța diferențialei este formală (spre deosebire de invarianța diferențiabilității față de operația de compunere a funcțiilor, care este una reală). Într-adevăr, dacă folosim notația completă a diferențialei, avem:

$$dh(x_1, x_2) = \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_1}df_1(x_1, x_2) +$$
$$+ \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_2}df_2(x_1, x_2)$$

Deci în egalitatea $dh = \frac{\partial g}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2} df_2$, df_1 şi df_2 sunt diferenţialele funcţiilor $f_1(x_1, x_2)$ şi $f_2(x_1, x_2)$ definite pe E.

Pe de altă parte,

$$dg(f_1, f_2) = \frac{\partial g(f_1, f_2)}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial g(f_1, f_2)}{\partial f_2} df_2$$

deci în egalitatea $dg = \frac{\partial g}{\partial f_1} df_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2} df_2$, df_1 şi df_2 sunt diferenţialele variabilelor f_1 şi f_2 ale funcţiei $g(f_1, f_2)$.

O altă proprietate de invarianţă prin operaţia de compunere a funcţiilor, este existenţa şi continuitatea derivatelor parţiale, aşa cum rezultă din următorul

Corolar

Dacă funcţiile $f_1(x_1, x_2)$ şi $f_2(x_1, x_2)$ au derivate parţiale continue pe E, iar funcţia $g(f_1, f_2)$ are derivate parţiale continue pe F atunci funcţia compusă

$$h(x_1, x_2) = g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]$$

are derivate parţiale continue pe E.

Într-adevăr, deoarece funcţiile $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ şi $g(f_1, f_2)$ au derivate parţiale continue, ele sunt diferenţiabile, deci şi continue. Atunci funcţia compusă este diferenţiabilă, deci are derivate parţiale date de formulele

$$\frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_1} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_2} \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial h(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_1} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial g[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)]}{\partial f_2} \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

Toate funcţiile din membrul drept sunt continue, fie prin ipoteză, cum sunt derivatele parţiale ale funcţiilor f_1 şi f_2, fie ca funcţii compuse de funcţii continue cum sunt

$$\frac{\partial g[f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)]}{\partial f_1} \text{ şi } \frac{\partial g[f_1(x_1,x_2),f_2(x_1,x_2)]}{\partial f_2}$$

Rezultă deci că $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ şi $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ sunt continue.

În cazul general, când funcția compusă $h = g \circ f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $h = (h_1, h_2, ..., h_p)$ este definită de

$$h(x) = g[f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)] \tag{3.14}$$

cu $x = (x_1, ..., x_n) \in \overset{o}{E}$

$g = (g_1, g_2, ..., g_p)$

putem reține <u>formula de calcul a derivatelor parțiale pentru funcții compuse</u>, anume:

$$\boxed{\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_j}} \tag{3.15}$$

pentru $i = \overline{1,p}$ şi $j = \overline{1,n}$.

<u>Exemplu:</u> ---

Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, $\left| \begin{array}{l} f_1(x_1,x_2) = x_1 \cos x_2 \\ f_2(x_1,x_2) = x_1 \sin x_2 \end{array} \right.$

$g : F \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(y_1, y_2) = y_1^3 - y_1 y_2 + y_2^3$,

Fie funcția compusă $h = g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$h(x_1,x_2) = g\ [\ \underbrace{f_2(x_1,x_2)}_{y_1}, \underbrace{f_2(x_1,x_2)}_{y_2}\ ]$

Avem

*) $\frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} =$

$= (3y_1^2 - y_2)\cos x_2 + (-y_1 + 3y_2^2)\sin x_2 =$

$= (3x_1^2 \cos^2 x_2 - x_1 \sin x_2)\cos x_2 +$

$+ (-x_1 \cos x_2 + 3x_1^2 \sin^2 x_2)\sin x_2 =$

$= 3x_1^2(\cos^3 x_2 + \sin^3 x_2) - 2x_1 \cos x_2 \sin x_2$

**) $\frac{\partial h}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial g}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}=$
$=(3y_1^2-y_2)(-x_1\sin x_2)+(-y_1+3y_2^2)x_1\cos x_2=$
$=(3x_1^2\cos^2 x_2-x_1\sin x_2)(-x_1\sin x_2)+$
$+(-x_1\cos x_2+3x_1^2\sin^2 x_2)x_1\cos x_2=$
$=3x_1^3\sin x_2\cos x_2(\sin x_2-\cos x_2)+$
$+x_1^2(\sin^2 x_2-\cos^2 x_2)$
--

6.4. Diferenţiale de ordin superior

Fie funcţia $f: E\subset \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ şi $x_0\in \overset{o}{E}$.

Definiţie:

Spunem că funcţia f este diferenţială de n ori în punctul x_0, dacă toate derivatele sale parţiale de ordin n-1 există într-o vecinătate a punctului x_0, $V(x_0)$, şi dacă acestea sunt funcţii diferenţiabile în x_0.

De asemenea, spunem că f este de n ori diferenţiabilă pe mulţimea deschisă E dacă este de n ori diferenţiabilă în fiecare punct al acestei mulţimi.

Propoziţia 1:

Dacă funcţia f are toate derivatele parţiale de ordin n (într-o vecinătate $V(x_0)$ a lui x_0, pe E) şi dacă aceste derivate parţiale sunt continue (în x_0, pe E), atunci f este de n ori diferenţiabilă (în x_0 pe E) şi diferenţiala sa este

$$d^n f(x)=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right]^n f(x) \tag{4.1}$$

unde puterile sunt simbolice.

Într-adevar, toate derivatele parțiale de ordin n-1 au derivate parțiale continue în x_0 (pe E), deci toate derivatele parțiale de ordinul n-1 sunt diferențiabile în x_0 (pe E).

Prin inducție matematică, se obține că diferențiala de ordin n (în punctul $x \in E$) este

$$d^n f(x) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_n=1}^{n}\frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_n}}dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_n} = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right]^n f(x)$$

dacă se introduce operatorul diferențial de ordin n

$$\boxed{d^n = \left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k\right]^n} \tag{4.2}$$

unde puterea n este simbolică, adică: exponentul n înseamnă că se dezvoltă formal suma din paranteză după regula lui Newton; deci, operatorul de diferențiere de ordin n este, formal, puterea a n-a a operatorului de diferențiere de ordinul întâi,

$$d = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}dx_k$$

Expresia $d^n f(x)$ înseamnă produsul formal dintre operatorul d^n şi funcția $f(x)$. Dacă nu se mai pune în evidență variabila vectorială x, avem

$$d^n f = d(d^{n-1}f) \tag{4.3}$$

Exemplu: ---

Pentru două variabile x,y operatorul diferențial de ordinul întâi este

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy \tag{4.4}$$

Atunci pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avem

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{4.5}$$

Diferențiala de ordin doi va fi:

$$d^2 f = d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$

$$= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \underbrace{d(dx)}_{=0} + \underbrace{d(dy)}_{=0} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^2 f$$

Fie funcțiile

$f : E \subset \mathbb{R}^n \to F \subset \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$,

$g : F \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$h = g \circ f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\qquad h(x) = g[f_1(x), ..., f_m(x)]$

$x_0 \in \overset{o}{E}$, $\qquad y_0 = f(x_0) \in \overset{o}{F}$

Propoziția 2:

Dacă funcția f este diferențiabilă de două ori în x_0 (pe E) iar funcția g este diferențiabilă de două ori într-o vecinătate a punctului $y_0 = f(x_0)$ (pe $F = f(E)$) atunci funcția compusă h este diferențiabilă de două ori în x_0 (pe E) şi avem

$$d^2 h = \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 g}{\partial f_k \partial f_j}df_k df_j + \frac{\partial g}{\partial f_k}d^2 f_k\right] \tag{4.6}$$

Demonstrație:

Într-adevăr, funcția f fiind diferențiabilă de două ori într-un punct $x \in E$, are derivate parțiale de ordin întâi într-o vecinătate a lui x, $V(x) \subset E$ şi acestea sunt diferențiabile în x. Rezultă că funcția compusă h are derivate parțiale de ordinul întâi în $V(x)$.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g(f(x))}{\partial f_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \quad \text{şi} \tag{4.7}$$

$$dh(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial g(f)}{\partial f_k}df_k(x) \tag{4.8}$$

Cum în (4.7) toate funcțiile din membrul drept sunt diferențiabile în x (prin ipoteză sau prin operația de compunere) rezultă că şi funcțiile $\frac{\partial h}{\partial x_i}(x)$ sunt diferențiabile în x, de unde deducem (conform Young) că funcția h are derivate parțiale de ordinul doi în x, iar derivatele mixte sunt egale. Atunci,

$$d^2h = d(dh) = d\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial f_k} df_k\right] = \sum_{k=1}^{m}\left[d\left(\frac{\partial g}{\partial f_k}\right)df_k + \frac{\partial g}{\partial f_k} d(df_k)\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial f_j}\left(\frac{\partial g}{\partial f_k}\right)df_j df_k + \frac{\partial g}{\partial f_k} d^2 f_k\right]$$

de unde rezultă formula (4.6).

<u>Observații</u>:--

a) Dacă funcția g este diferențiabilă de două ori numai în y_0, putem deduce că h are derivate parțiale de ordinul întâi numai în x_0, deci nu rezultă că h este diferențiabilă de două ori în x_0.

b) Formula (4.6) se poate scrie simbolic

$$\boxed{d^2h = \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial f_k} df_k\right]^2 g + \left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial f_k} d^2 f_k\right] g} \tag{4.9}$$

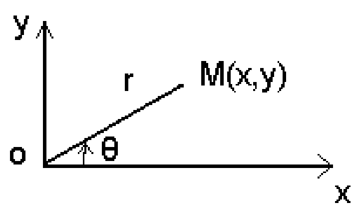
c) Propoziția rămâne valabilă şi pentru diferențialele de ordinul <u>n</u> ale funcțiilor compuse. Astfel, prin inducție se demonstrează că <u>dacă f este de n ori diferențiabilă pe E, iar g este de n ori diferențiabilă pe F=f(E), atunci funcția compusă h este de n ori diferențiabilă pe E</u>.

--

<u>Aplicație:</u> Să se <u>scrie ecuația lui Laplace în coordonate polare</u>.

Pentru $f : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ecuația Laplace este

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{4.10}$$



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{4.11}$$

Funcția f ca funcție de coordonatele polare r şi θ poate fi privită ca funcție compusă de forma

$$f[x(r,\theta), y(r,\theta)] \tag{4.12}$$

Vom calcula df şi d^2f conform formulelor (3.14) şi (4.6).

*) $df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

Cum $dx = \left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial \theta}d\theta\right)x = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial r}{\partial \theta}d\theta =$

$= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$

$$dy = \left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial \theta}d\theta\right)y = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

Rezultă că

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) =$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)dr + \left(-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\theta$$

De aici putem reține

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

şi deducem că

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial \theta} \end{cases} \qquad (4.13)$$

**) $d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + \left(\frac{\partial}{\partial x}d^2x + \frac{\partial}{\partial y}d^2y\right) f =$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial f}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$$

Dar

$$d^2x = \left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial \theta}d\theta\right)^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}(dr)^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial \theta}drd\theta +$$

$$+ \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2}(d\theta)^2 = -2\sin\theta drd\theta - r\cos\theta(d\theta)^2$$

$$d^2y = \left(\frac{\partial}{\partial r}dr + \frac{\partial}{\partial \theta}d\theta\right)^2 y = -2\cos\theta drd\theta - r\sin\theta(d\theta)^2$$

În expresia lui d^2f înlocuim dx, dy, d^2x, d^2y precum şi $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ conform (4.13) şi obținem

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) +$$
$$+\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\left(-2\sin\theta dr d\theta - r\cos\theta(d\theta)^2\right) +$$
$$+\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)\left(-2\cos\theta dr d\theta - r\sin\theta(d\theta)^2\right)$$

Vom grupa termenii după $(dr)^2$, $(d\theta)^2$ şi $drd\theta$.

$$d^2f = \left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right](dr)^2 +$$
$$+\left[r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\frac{\partial f}{\partial r}\right](d\theta)^2 +$$
$$+\left[-2r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2r\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - 4\sin\theta\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r} +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right]drd\theta$$

Putem reține următoarele egalități

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} = r^2\sin^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + r^2\cos^2\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\sin\theta\cos\theta\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - r\dfrac{\partial f}{\partial r} \end{cases}$$

de unde, cu uşurință, obținem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$

deci ecuația lui Laplace în coordonate polare este

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0} \qquad (4.14)$$

6.5. Formula lui Taylor

Fie funcția $f:[a,b]\to \mathbb{R}$, derivabilă de n ori într-un punct $x_0 \in (a,b)$. Aceasta înseamnă că primele n-1 derivate există într-o întreagă vecinătate a lui x_0. Pentru simplitate, vom presupune că primele n-1 derivate există pe întregul interval (a,b).

Pentru fiecare $x \in [a,b]$ definim polinomul

$$\boxed{T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} \quad (5.1)$$

Acesta poartă denumirea de polinomul lui Taylor de gradul n, ataşat funcției f, în punctul x_0.

Dacă pentru fiecare $x \in [a,b]$ notăm

$$R_n(x)=f(x)-T_n(x) \quad (5.2)$$

atunci

$f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, adică

$$\boxed{\begin{aligned} f(x)=f(x_0)&+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\\ &+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\end{aligned}} \quad (5.3)$$

Această egalitate valabilă pentru orice $x \in [a,b]$ se numeşte formula lui Taylor de ordinul n, corespunzătoare funcției f, în punctul x_0. Funcția $R_n:[a,b]\to \mathbb{R}$ se numeşte restul de ordinul n, al formulei lui Taylor.

Observații:--

a) R_n este o funcție de n ori derivabilă în x_0 deoarece funcția f are această proprietate, iar polinomul T_n este funcție de n ori derivabilă pe (a,b).

Rezultă că R_n este funcție continuă în x_0.

b) Din (5.3) pentru $x=x_0$ deducem

$R_n(x_0)=0$, deci

$$\lim_{x \to x_0} R_n(x) = R_n(x_0) = 0 \qquad (5.4)$$

c) Pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, funcția f poate fi aproximată de polinomul Taylor

$$f(x) \approx T_n(x) \qquad (5.5)$$

În cele ce urmează încercăm să găsim o formă pentru restul formulei lui Taylor.

<u>Propoziție</u>:

Dacă funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este de n+1 ori derivabilă pe (a,b) atunci restul formulei Taylor are forma

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)\,!}(x - x_0)^{n+1} \qquad (5.4)$$

unde $\theta \in (0,1)$

şi se numeşte <u>restul lui Lagrange</u>.

<u>Demonstrație</u>

Pentru x şi $x_0 \in [a,b]$ fixați şi $p \in \mathbb{N}$ pentru rest considerăm forma

$$R_n(x) = (x - x_0)^p \cdot k \qquad (5.5)$$

unde k este un număr care se schimbă odată cu x şi x_0.

Pentru punctul x ales, formula lui Taylor de ordinul n în punctul x_0 se scrie:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + (x - x_0)^p \cdot \kappa \qquad (5.6)$$

Considerăm funcția $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x - t) + \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n + (x - t)^p \cdot \kappa \qquad (5.7)$$

Funcția φ este derivabilă pe (a,b) deoarece toate funcțiile din membrul drept au această proprietate.

Dacă ne referim la intervalul $[x_0, x] \subset [a,b]$ putem spune că φ este funcție Rolle pe acest interval şi că $\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x)$.

Putem aplica teorema lui Rolle pe acest interval, deci există un punct $\xi \in (x_0, x)$ astfel încât $\varphi'(\xi) = 0$.

Dar

$$\varphi'(t) = f'(t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{1!} + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 -$$

$$-\frac{f''(t)}{1!}(x-t) + ... + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n -$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)\,!}(x-t)^{n-1} - p(x-t)^{p-1} \cdot \kappa\text{, deci}$$

$$\varphi'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - p(x-t)^{p-1}\kappa$$

condiția $\varphi'(\xi) = 0$ ne conduce la

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n - p(x-\xi)^{p-1} \cdot \kappa = 0$$

de unde

$$\kappa = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{5.8}$$

Aşadar, restul R_n se va scrie

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{p \cdot n!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{5.9}$$

În particular, pentru p=n+1 se obține restul lui Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Deoarece $\xi \in (x_0, x)$, putem scrie $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$ cu $\theta \in (0,1)$, şi <u>formula Taylor de ordinul n</u> este

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + .. + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \\ &+ \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}} \tag{5.10}$$

Putem observa că dacă scriem formula Taylor (5.10) cu restul de ordinul zero, obținem formula creşterilor finite a lui Lagrange pe intervalul $[x_0, x]$, adică

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0) \qquad (5.11)$$

Formula lui Taylor poate fi definită şi pentru funcții de mai multe variabile

Fie deci o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x_0 = (x_{01},...,x_{0n}) \in \overset{o}{E}$ Vom presupune că funcția f este de n ori diferențiabilă în x_0. În acest caz, f are toate derivatele parțiale până la ordinul n inclusiv în x_0 iar derivatele mixte, în care variabilele în raport cu care se derivează intervin de acelaşi număr de ori, sunt egale în x_0.

În fiecare punct $x \in E$ polinomul Taylor de gradul n ataşat funcției f în x_0 este

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})\right] + \frac{1}{2!}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})\right]^2 + \dots + \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})\right]^n} \qquad (5.12)$$

unde puterile sunt simbolice.

Exemplu: --

Pentru n=2 avem

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})\right] + \dots + \frac{1}{n!}\left[\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})\right]^n,$$

deci

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)(x_1 - x_{01}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)(x_2 - x_{02})\right] + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0)(x_1 - x_{01})^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0)(x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02}) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0)(x_2 - x_{02})^2\right] +$$

$$+ \dots + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}}(x_0)(x_1 - x_{01})^k (x_2 - x_{02})^{n-k}$$

Cum pentru creşteri mici $x_k - x_{0k}$ expresia $\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k})$ am numit-o diferențiala de ordin întâi a funcției f în x_0,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)(x_k - x_{0k}) = df(x_0)$$

polinomul Taylor (5.12) se mai poate scrie

$$T_n(x) = d^0 f(x_0) + \frac{1}{1!}df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(x_0)$$

adică

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} d^k f(x_0)} \qquad (5.13)$$

unde $d^0 f(x_0) = f(x_0)$.

Pentru orice $x \in E$, funcția f poate fi dată de egalitatea

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \qquad (5.14)$$

numită formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f în x_0, iar funcția $R_n : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este restul de ordinul n al formulei lui Taylor.

Se poate observa că funcția R_n este continuă şi nulă în x_0, $\lim_{x \to x_0} R_n(x) = R_n(x_0) = 0$, prin urmare, pentru valori ale lui x suficient de apropiate de x_0, $f(x) \approx T_n(x)$.

Propoziția 1:

Dacă funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este de n+1 ori diferențiabilă într-o vecinătate $V(x_0) \subset E$, atunci pentru orice $x \in E$ există un punct $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in V(x_0)$ situat pe segmentul $[x_0, x]$ astfel încât să avem

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\xi)(x_k - x_{0k}) \right]^{n+1} \qquad (5.15)$$

adică $R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(\xi)$ (5.16)

Acesta este restul lui Lagrange.

Formula lui Taylor se scrie

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi)} \quad (5.17)$$

Fie $f:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x_0\in\overset{o}{E}$

<u>Propoziția 2:</u>

Dacă funcția f are derivate parțiale de ordinul n continue în $V(x_0)\subset E$, atunci restul de ordinul <u>n</u> al formulei lui Taylor se poate pune sub forma:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\omega(x)\|x-x_0\|^n \quad (5.18)$$

unde funcția $\omega:E\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ este continuă şi nulă în x_0.

<u>Demonstrație:</u> pentru simplitate, demonstrația o facem numai pentru cazul n=2.

Deoarece f are derivate parțiale de ordinul n continue în $V(x_0)$, atunci ea este diferențiabilă de n ori în $V(x_0)$ şi conform propoziției 1, restul de ordinul n-1 al formulei Taylor, sub forma dată de Lagrange, este

$$\begin{aligned}R_{n-1}(x)&=\frac{1}{n!}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi)(x_1-x_{01})+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\xi)(x_2-x_{02})\right]^n=\\&=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n f}{\partial x_1^k\partial x_2^{n-k}}(\xi)(x_1-x_{01})^k(x_2-x_{02})^{n-k}\end{aligned} \quad (5.19)$$

unde $x=(x_1,x_2)\in V(x_0)$

$\xi=(\xi_1,\xi_2)\in V(x_0)$

$\xi_1=(x_{01},x_1)$; $\xi_2=(x_{02},x_2)$

cum $\lim\limits_{\xi\to x_0}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^k\partial x_2^{n-k}}(\xi)=\frac{\partial^n f}{\partial x_1^k\partial x_2^{n-k}}(x_0)$

din cauza continuității acestor derivate, putem scrie

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^k\partial x_2^{n-k}}(\xi)=\frac{\partial^n f}{\partial x_1^k\partial x_2^{n-k}}(x_0)+\omega_k(x) \quad (5.20)$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \omega_k(x) = \omega_k(x_0) = 0$, $k = \overline{1,n}$

Atunci avem:

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x_1^k \partial x_2^{n-k}}(x_0)(x_1 - x_{01})^k (x_2 - x_{02})^{n-k}$$

$$+\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega_k(x)(x_1 - x_{01})^k (x_2 - x_{02})^{n-k}$$

Rezultă că

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega_k(x)(x_1 - x_{01})^k (x_2 - x_{02})^{n-k} = \frac{1}{n!}\omega(x)\|x - x_0\|^n$$

unde am notat

$$\omega(x) = \frac{1}{\|x - x_0\|^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \omega_k(x)(x_1 - x_{01})^k (x_2 - x_{02})^{n-k} \tag{5.21}$$

Deoarece

$$0 < |\omega(x)| \le \frac{1}{\|x - x_0\|^n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\omega_k(x)| \cdot \|x - x_0\|^k \cdot \cdot \|x - x_0\|^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k |\omega_k(x)| \to 0$$

pentru $x \to x_0$

putem spune că

$$\lim_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$$

adică funcția ω este continuă şi nulă în x_0.

Pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in \overset{\circ}{E}$ formula lui Taylor de ordinul n corespunzătoare funcției f în x_0,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{5.22}$$

va fi o relație vectorială echivalentă cu $\underline{m}$ relații scalare

$$f_i(x) = T_{ni}(x) + R_{ni}(x),\ i = \overline{1,m} \tag{5.23}$$

6.6. Funcții implicite

Fie mulțimea $E = A \times B \subset \mathbb{R}^{n+1}$, unde $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $B \subset \mathbb{R}$, şi fie funcția $F : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

Pentru $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A$ şi $y \in B$, fie ecuația

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0 \tag{6.1}$$

sau folosind o scriere mai simplă,

$$F(x, y) = 0 \tag{6.2}$$

Definiție:

Funcția $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ **este soluție pe mulțimea A în raport cu variabila y a ecuației (6.1), dacă:**

$$F(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) = 0 \tag{6.3}$$

pentru orice $(x_1, ..., x_n) \in A$ **.**

Dacă soluția este unică, atunci spunem că funcția $y = f(x_1, ..., x_n)$ este definită implicit de relația (6.1).

Ecuația (6.1) o numim **ecuație implicită**.

În continuare, ne punem problema condițiilor în care ecuația (6.1) poate fi rezolvată în raport cu variabila y, mai precis, în ce condiții există funcția $f : A \to B$ astfel încât $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in A$.

Teorema funcțiilor implicite

Fie funcția $F : E \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ şi $(x_0, y_0) \in \overset{o}{E}$.

Dacă:

1) $F(x_0, y_0) = 0$
2) F are derivate parțiale de ordinul întâi, $\frac{\partial F}{\partial x_k}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ $(k = \overline{1,n})$ continue într-o vecinătate $U \times V \subset E$ (cu $U \subset A$, $V \subset B$) a punctului $(x_0, y_0) \in \overset{o}{E}$.
3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

Atunci:

a) există o vecinătate $U_0 \times V_0 \subset U \times V$ a punctului (x_0, y_0) şi o unică funcție $f : U_0 \to V_0$, continuă pe U_0, astfel ca $f(x_0) = y_0$ şi $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_0$

b) f are derivate parțiale continue pe U_0 şi

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x)}} \quad (\forall)\ x \in U_0,\ i = \overline{1,n} \tag{6.4}$$

c) Dacă $F \in C^k(U \times V)$ atunci $f \in C^k(U_0)$

Demonstrație:

a) Din ipotezele 2) şi 3) reținem că funcția $\frac{\partial F}{\partial y}$ este continuă şi $\neq 0$ în punctul (x_0, y_0). Deducem că $\frac{\partial F}{\partial y}$ este $\neq 0$ pe o întreagă vecinătate a punctului (x_0, y_0). Fie $U \times V$ această vecinătate, adică

$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$ pentru $x \in U$ şi $y \in V$.

Din ipoteza 2), rezultă că funcția F este diferențiabilă, deci continuă, pe $U \times V$. În particular:

*) Pentru $y \in V$ fixat, funcția $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$\varphi(x) = F(x, y)$ este continuă pe U

**) Pentru $x \in U$ fixat, funcția $\psi : V \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$\psi(y) = F(x, y)$ este continuă pe V, deci şi strict monotonă pe V deoarece

$$\psi'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0 \text{ pentru } y \in V \tag{6.5}$$

Alegem punctele arbitrare $\alpha, \beta \in V$ astfel încât $\alpha < y_0 < \beta$.

Fie $V_0 = (\alpha, \beta)$. Din ipoteza (1) şi rezultatul (6.5), se deduce că funcția $\psi_0(y) = F(x_0, y)$ are semne diferite în punctele α şi β.

Fie, de exemplu, următoarea alegere:

$$\psi_0(\alpha) = F(x_0, \alpha) < 0 \text{ şi } \psi_0(\beta) = F(x_0, \beta) > 0 \qquad (6.6)$$

Din (6.6) şi din proprietatea de continuitate a funcției φ pe U, putem spune că există vecinătățile $U' \subset U$ şi $U'' \subset U$ ale lui x_0, astfel încât
$\varphi_1(x) = F(x, \alpha) < 0$ pentru $x \in U'$ şi
$\varphi_2(x) = F(x, \beta) > 0$ pentru $x \in U''$

Dacă notăm $U_0 = U' \cap U''$, obținem

$$\varphi_1(x) = F(x, \alpha) < 0 \text{ şi } \varphi_2(x) = F(x, \beta) > 0 \qquad (6.7)$$

pentru $x \in U_0$.

Fie un punct $x \in U_0$ fixat, arbitrar ales. Funcția $\psi(y) = F(x, y)$ fiind continuă pe $[\alpha, \beta]$, ea are proprietatea lui Darboux pe acest interval. Având în vedere şi rezultatul (6.7), putem spune că există un punct $y \in V_0$ astfel că $\psi(y) = F(x, y) = 0$. Mai mult, acest punct este unic deoarece funcția ψ este strict monotonă pe $[\alpha, \beta]$.

Prin urmare, există o vecinătate U_0 a lui x_0 şi o vecinătate V_0 a lui y_0, astfel ca, pentru orice $x \in U_0$ fixat ecuația $F(x, y) = 0$ are, pe V_0, singura soluție $y = f(x)$ cu proprietatea $F(x, f(x)) = 0$ pentru orice $x \in U_0$. Altfel spus, ecuația $F(x, y) = 0$ defineşte funcția implicită $f : U_0 \to V_0$. Pentru $x = x_0$, avem $F(x_0, y_0) = 0$; cum y_0 este singurul punct din V_0 cu această proprietate, obținem şi condiția $f(x_0) = y_0$.

Observăm că vecinătatea V_0 a lui y_0 a fost aleasă arbitrar; deducem că, pentru orice vecinătate V_0 a lui $y_0 = f(x_0)$, există o vecinătate U_0 a lui x_0 astfel ca $f(x) \in V_0$ pentru orice $x \in U_0$. Deci, funcția implicită $f(x)$ este continuă în x_0. Mai mult, se arată că funcția implicită f este continuă pe întreaga vecinătate U_0 a lui x_0.

b) Este suficient să arătăm că f este funcție diferențiabilă Fréchet pe vecinătatea U_0 a punctului x_0.

Fie $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in U_0$ arbitrar ales
$b = f(a) \in V_0$

Conform ipotezei 2) rezultă că F este o funcție diferențiabilă Fréchet pe mulțimea $U \times V$, deci este diferențiabilă şi în punctul $(a,b) \in U \times V$, deci pentru orice punct $(x,y) \in U \times V$ putem scrie:

$$F(x,y) - F(a,b) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b) + \omega_k(x,y)\right](x_k - a_k) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) + \omega(x,y)\right](y - b) \tag{6.8}$$

unde

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \omega_k(x,y) = \omega_k(a,b) = 0$$
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \omega(x,y) = \omega(a,b) = 0 \tag{6.9}$$

În particular, dacă luăm $x \in U_0$ şi $y \in V_0$, avem

$$F(x,y) = F(x, f(x)) = 0$$
$$F(a,b) = F(a, f(a)) = 0 \tag{6.10}$$

astfel încât (6.8) devine

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b) + \omega_k(x,y)\right](x_k - a_k) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) + \omega(x,y)\right][f(x) - f(a)] = 0$$

sau

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b) + \omega_k(x,f(x))\right](x_k - a_k) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) + \omega(x,f(x))\right][f(x) - f(a)] = 0 \tag{6.11}$$

<u>Observație</u>:---

*) Din f continuă în a şi ω_k, ω continue şi nule în (a,b) rezultă

$$\lim_{x\to a} \omega_k(x, f(x)) = \omega_k(a, f(a)) = 0$$
$$\lim_{x\to a} \omega(x, f(x)) = \omega(a, f(a)) = 0 \tag{6.12}$$

**) Din $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+\omega(x,f(x))\right]=\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\neq 0$ rezultă că există o vecinătate $U_1(a)$ astfel încât pentru orice $x\in U_1(a)$ să avem

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+\omega(x,f(x))\neq 0 \tag{6.13}$$

Din (6.11) deducem:

$$f(x)-f(a)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)+\omega_k(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+\omega(x,f(x))}(x_k-a_k) \tag{6.14}$$

Notăm

$$\Omega_k(x)=\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)+\omega_k(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)+\omega(x,f(x))}-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)} \tag{6.14}$$

şi observăm că

$$\lim_{x\to a}\Omega_k(x)=\Omega_k(a)=0 \tag{6.15}$$

În felul acesta, relația (6.14) se scrie

$$f(x)-f(a)=-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)}+\Omega_k(x)\right](x_k-a_k) \tag{6.16}$$

şi avem demonstrată diferențiabilitatea în punctul a pentru funcția f. Din (6.16) mai deducem că

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a,f(a))}{\frac{\partial F}{\partial y}(a,f(a))} \tag{6.17}$$

Cum punctul $a\in U_0$ a fost arbitrar ales, rezultă că f este diferențiabilă în orice $x\in U_0$ iar derivatele sale parțiale sunt

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_k} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},\ k = \overline{1,n}} \qquad (6.18)$$

Cum derivatele parțiale $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}$ au fost presupuse funcții continue pe $U \times V$, iar f este continuă în U_0, rezultă că derivatele parțiale (6.18) sunt continue pe U_0.

----

c) Se demonstrează prin inducție completă, afirmația fiind demonstrată pentru $k = 1$.

<u>Exemplu:</u> ---

Să se calculeze derivatele parțiale $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ şi $\frac{\partial y}{\partial x_2}$ în punctul $(x_{01}, x_{02}, y_0) = (2,2,0)$, dacă funcția y este dată implicit de ecuația

$$(x_1 + x_2)e^y - x_1x_2 - y = 0 \qquad (6.19)$$

Verificăm indeplinirea condițiilor impuse de teorema funcțiilor implicite.

În cazul nostru,

$$F(x_1, x_2, y) = (x_1 + x_2)e^y - x_1x_2 - y \qquad (6.20)$$

1) $F(2,2,0) = 0$

2) $F \in C'(V^*(2,2,0))$ evident

3) $\frac{\partial F}{\partial y}(2,2,0) = \left[(x_1 + x_2)e^y - 1\right]_{(2,2,0)} = 3 \neq 0$

Diferențiem (6.20)

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0$$

$$(e^y - x_2)dx_1 + (e^y - x_1)dx_2 + \left[(x_1 + x_2)e^y - 1\right]dy = 0$$

$$dy = -\frac{e^y - x_2}{(x_1 + x_2)e^y - 1}dx_1 - \frac{e^y - x_1}{(x_1 + x_2)e^y - 1}dx_2$$

De aici deducem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = -\dfrac{e^y - x_2}{(x_1 + x_2)e^y - 1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = -\dfrac{e^y - x_1}{(x_1 + x_2)e^y - 1} \end{cases} \qquad (6.21)$$

de unde avem

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}(2,2,0) = \frac{1}{3} \text{ şi } \frac{\partial y}{\partial x_2}(2,2,0) = \frac{1}{3}$$

<u>**Observaţii**</u>:---

Teorema funcţiilor implicite se poate enunţa şi pentru cazul unei funcţii vectoriale

$F : E \subset \mathbb{R}^{n+p} \to \mathbb{R}^p$

unde $E = A \times B$ cu $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$

Pentru $x \in A$ şi $y \in B$, ecuaţia

$F(x, y) = 0$

este o <u>ecuaţie</u> <u>vectorială</u> <u>echivalentă</u> <u>cu</u> $\underline{p}$ <u>ecuaţii</u> <u>scalare</u>.

În acest caz, condiţia 3) din teoremă se scrie pentru determinantul funcţional al funcţiei vectoriale F în raport cu variabila vectorială y, adică

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_p)}{D(y_1,\ldots,y_p)} \neq 0 \text{ pentru } (x, y) = (x_0, y_0) \qquad (6.22)$$

iar derivatele parţiale ale funcţiei vectoriale $f : U_0 \subset \mathbb{R}^n \to V_0 \subset \mathbb{R}^p$ pe vecinătatea U_0 sunt

$$\boxed{\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_j,\ldots,F_p)}{D(y_1,\ldots,x_j,\ldots,y_p)}}{\dfrac{D(F_1,\ldots,F_j,\ldots,F_p)}{D(y_1,\ldots,y_j,\ldots,y_p)}}} \qquad (6.23)$$

pentru $i = \overline{1,p}$ şi $j = \overline{1,n}$

6.7. Extremele funcțiilor de mai multe variabile

Fie funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \overset{o}{E}$.

Definiție:

Punctul $x_0 \in \overset{o}{E}$ se numeşte punct de extrem (local) al funcției f, dacă există o vecinătate $V(x_0) \in E$ astfel încât să avem $f(x) \leq f(x_0)$ sau $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x \in V(x_0)$ după cum extremul este punct de maxim (local) sau minim (local).

Valoarea funcției f înt-un punct x_0 de extrem, se numeşte extrem al funcției f (maxim sau minim)

Propoziția 1:

Dacă funcția f are derivate parțiale de ordinul întâi într-un punct de extrem $x_0 \in \overset{o}{E}$, atunci acestea se anulează în acest punct.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0, \ k = \overline{1,n} \tag{7.1}$$

Demonstrație:

Fie funcția parțială $f_i : E_i \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_i(x_i) = f(x_{01}, \ldots, x_i, \ldots, x_{0n}) \tag{7.2}$$

$$E_i = \{x_i \in \mathbb{R} \mid (x_{01}, \ldots, x_i, \ldots, x_{0n}) \in E\}$$

Despre această funcție putem spune că este derivabilă în punctul x_{0i} şi că

$$f_i'(x_{0i}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \tag{7.3}$$

Deoarece punctul $x_{0i} \in \overset{o}{E}_i$ este punct de extrem pentru funcția f_i, conform teoremei lui Fermat,avem $f_i'(x_{0i}) = 0$, de unde deducem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \tag{7.4}$$

Rezultatul este valabil pentru orice $i = \overline{1,n}$

<u>Definiție</u>:

Punctul $x_0 \in \overset{o}{E}$ se numeşte <u>punct staționar al funcției f</u>, dacă această funcție este diferențiabilă în x_0 şi dacă diferențiala sa în acest punct este nulă,

$$df(x_0) = 0 \tag{7.5}$$

<u>Observație</u>:---

Deoarece diferențiala funcției f în x_0 este

$$df(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) dx_k$$

avem $df(x_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0$, $k = \overline{1,n}$ (7.6)

<u>Propoziție 2:</u>

Orice punct $x_0 \in \overset{o}{E}$ de extrem local în care funcția f este diferențiabilă este punct staționar al funcției.

Într-adevăr, conform propoziției precedente rezultă (7.4) şi conform cu (7.6), x_0 este punct staționar al funcției f.

<u>Observație</u>:---

Reciproca nu este totdeauna adevărată adică există puncte staționare care nu sunt puncte de extrem local.

<u>Exemplu:</u> ---

Funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^2 - y^2$

*) Funcția f este diferențiabilă în $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ deoarece derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$ sunt funcții continue în acest punct

$$df(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)dy=0$$

deci $(0,0)$ este punct staționar.

**) Punctul $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ nu este punct de extrem local deoarece avem

$f(x,0)=x^2>0 \ \Rightarrow\ f(x,0)>f(0,0)$

$f(0,y)=-y^2<0 \ \Rightarrow\ f(0,y)<f(0,0)$

în orice vecinătate $V(0,0)\subset\mathbb{R}^2$.

-- 🕮

<u>Definiție:</u>

Punctele staționare ale funcției f care nu sunt puncte de extrem local, se numesc <u>puncte şa ale lui f</u>.

<u>Interpretare geometrică:</u> Graficul unei funcții $f:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este o suprafață S din $\mathbb{R}^3$ de ecuație $z=f(x,y)$.

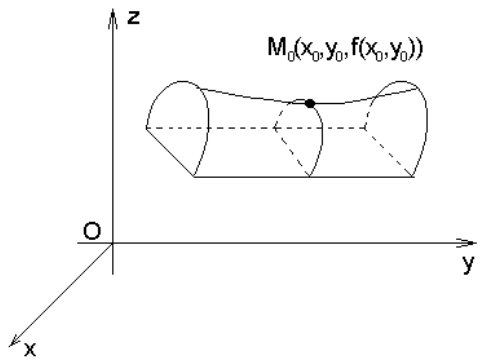
Dacă f este diferențiabilă în punctul $(x_0,y_0)\in\overset{o}{E}$ suprafața S are plan tangent în punctul $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ a cărei ecuație este

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Dacă (x_0,y_0) este punct staționar, suprafața S are în punctul $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ plan tangent paralel cu planul (xOy) a cărui ecuație este

$$z=f(x_0,y_0)$$

Dacă punctul staționar (x_0,y_0) nu este punct de extrem local, atunci, în vecinătatea lui, suprafața S are formă de şa (Fig. 2).



- Figura 2 -

Propoziția 3:

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overset{o}{E}$ şi forma pătratică

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\frac{x_i - x_{0i}}{\|x - x_0\|} \cdot \frac{x_j - x_{0j}}{\|x - x_0\|} \tag{7.7}$$

cu $x \in V(x_0)$.

Dacă x_0 este punct staționar al funcției f şi dacă aceasta are derivate parțiale de ordinul doi continue în $V(x_0)$, atunci:

a) Dacă forma pătratică φ este definită, punctul x_0 este punct de extrem local al funcției, fiind punct de maxim local dacă $\varphi(x)<0$ sau punct de minim local dacă $\varphi(x)>0$ pentru $x \in V(x_0)$

b) Dacă forma pătratică φ este indefinită, atunci x_0 nu este punct de extrem local al funcției

c) Dacă forma pătratică φ este degenerată, atunci despre x_0 nu putem afirma nimic.

Observații:--

1) forma pătratică φ este degenerată dacă rang$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=\overline{1,n}} < n$

2) forma pătratică φ este pozitiv definită, $\varphi(x) > 0$ pentru $x \in V(x_0)$, dacă determinanții principali ai matricei pătratice de ordinul n, $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ au următoarele semne:

$$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0. \tag{7.8}$$

Acestea sunt **<u>condițiile lui Sylvester</u>** din teoria formelor pătratice.

3) forma pătratică φ <u>este negativ definită</u>, $\varphi(x) < 0$ pentru $x \in V(x_0)$, dacă determinanții principali au semnele următoare:

$$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 < 0,\ \ldots \tag{7.9}$$

<u>Demonstrație:</u>
Scriem formula lui Taylor cu restul de ordinul doi conform relației (5.18) într-o vecinătate a punctului x_0.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(x_i - x_{0i}) + \\ &+ \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2!}\omega(x)\|x - x_0\|^2 \end{aligned} \tag{7.10}$$

unde

$$\lim_{x \to x_0}\omega(x) = \omega(x_0) = 0 \tag{7.11}$$

Deoarece x_0 este punct staționar, rezultă că:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \text{ pentru } i = \overline{1,n}$$

şi relația (7.10) devine

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \frac{1}{2}\omega(x)\|x - x_0\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\frac{x_i - x_{0i}}{\|x - x_0\|}\cdot\frac{x_j - x_{0j}}{\|x - x_0\|} + \omega(x)\right]\|x - x_0\|^2$$

adică

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) + \omega(x)\right]\|x - x_0\|^2 \tag{7.12}$$

Notăm cu

$$h_i = \frac{x_i - x_{0i}}{\|x - x_0\|} = h_i(x),\ \ i = \overline{1,n} \tag{7.13}$$

pentru orice $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$.

Fie $h = (h_1, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$

Observăm că

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2(x) = 1 \tag{7.14}$$

pentru orice $x \in V(x_0)$, $x \neq x_0$.

Forma pătratică (6.7) se scrie:

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\, h_i h_j \tag{7.15}$$

Dacă $\varphi(h)$ este o formă pătratică definită, înseamnă că ea nu se anulează în niciun punct $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$. De asemenea, $\varphi(h)$ fiind funcție continuă, rezultă că $|\varphi(h)|$ este continuă şi conform teoremei lui Weierstrass, această funcție îşi atinge valoarea minimă, $m > 0$, în cel puțin un punct al sferei unitate dată de (7.14).

Cum $\lim\limits_{x \to x_0} \omega(x) = 0$, putem spune că există o sferă centrată în x_0 de rază suficient de mică $(V^*(x_0) \subset V(x_0))$ astfel încât să avem:

$$|\omega(x)| < m \leq |\varphi(h)| \tag{7.16}$$

pentru orice $x \in V^*(x_0)$, $x \neq x_0$.

Rezultă că în $V^*(x_0)$ funcția $\varphi + \omega$ are acelaşi semn cu funcția φ. Astfel, obținem următorul rezultat:

*) Dacă $\varphi(x) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > f(x_0)$ pentru orice $x \in V^*(x_0)$, $x \neq x_0$ deci x_0 este punct de minim local

**) Dacă $\varphi(x) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) - f(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < f(x_0)$ pentru orice $x \in V^*(x_0)$, $x \neq x_0$ deci x_0 este punct de maxim local

Dacă $\varphi(h)$ este o formă pătratică indefinită, rezultă că ea se anulează în unele puncte $h \in \mathbb{R}^n$. Altfel spus, această formă pătratică ia atât valori strict negative, cât şi valori strict pozitive în $V(x_0)$. Rezultă că x_0 nu poate fi punct de extrem local.

Exemplu: --

Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

*) Determinăm puntele staționare din sistemul determinat de:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, adică

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0 \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0 \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

şi obținem soluțiile:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -1 \\ z_2 = -1 \end{cases} \tag{7.18}$$

**) Verificăm dacă aceste puncte staționare sunt puncte de extrem local precizând semnul formei pătratice φ cu ajutorul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & \frac{-y}{2x^2} & 0 \\ \frac{-y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & \frac{-2z}{y^2} \\ 0 & \frac{-2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

$$A\left(\frac{1}{2},1,1\right)=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

Determinanții principali sunt:

$\Delta_1 = 4 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 3\end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}4 & -2 & 0\\ -2 & 3 & -2\\ 0 & -2 & 6\end{vmatrix} = 32 > 0$$

Rezultă că forma pătratică φ este pozitiv definită, deci $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ este punct de minim local al funcției f.

Pentru cel de al doilea punct avem:

$$A\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -6\end{pmatrix}$$

Determinanții principali sunt:

$\Delta_1 = -4 < 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}-4 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix} = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 2 & -6\end{vmatrix} = -32 < 0$$

Rezultă că forma pătratică φ este negativ definită, deci $\left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)$ este punct de maxim local al funcției f.

-- 🕮

6.8. Extreme condiționate

Să considerăm o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi o submulțime $A \subset E$ definită astfel:

$$A = \{x \in E \mid F_i(x) = 0 \ , \ i = \overline{1,k} \ , \ k < n\} \tag{8.1}$$

Extremele funcției f care aparțin mulțimii A se numesc <u>extreme condiționate</u> sau <u>extreme cu legături</u>. Coordonatele acestor puncte sunt legate între ele prin cele <u>k</u> relații.

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ ... \\ F_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

Teorema următoare dă condiții necesare de existență a punctelor de extrem condiționat.

<u>Teoremă</u>:

Fie $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in \overset{o}{E}$

Dacă:

1) x_0 este punct de extrem local pentru f condiționat de relațiile (8.2)

2) funcțiile $f, F_1, ..., F_k \in C^1(V(x_0))$

3) $F_1(x_0) = 0$, $i = \overline{1,k}$

4) matricea funcțională $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,n}}}$ are rangul egal cu k.

Atunci există k numere reale $\lambda_1, ..., \lambda_k$ astfel încât să avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_2}(x_0) = 0 \\ ... \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

<u>Demonstrație:</u>
Având în vedere condiția 4), presupunem că determinantul funcțional

$$\left.\frac{D(F_1,...,F_k)}{D(x_1,...,x_k)}\right|_{x=x_0} \neq 0 \tag{8.4}$$

Dacă ținem seama şi de condițiile 2) şi 3) putem spune că sistemului (8.2) îi putem aplica teorema funcțiilor implicite. Prin urmare, există o vecinătate $V_0 \subset \mathbb{R}^k$ a punctului $(x_{01},...,x_{0k}) \in \mathbb{R}^k$ şi o vecintătate $U_0 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ a punctului $(x_{0k+1},...,x_{0n}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ astfel încât pentru orice punct $(x_{k+1},...,x_n) \in U_0$, sistemul (8.2) să aibă soluție unică

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1},x_{k+2},...,x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_{k+1},x_{k+2},...,x_n) \\ ... \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1},x_{k+2},...,x_n) \end{cases} \tag{8.5}$$

funcțiile $\varphi_1,...,\varphi_k$ având derivate parțiale continue pe vecinătatea $U_0 \subset \mathbb{R}^{n-k}$.

Scriem că (8.5) verifică sistemul (8.2) pentru orice punct $(x_{k+1},...,x_n) \in U_0$.

$$\begin{cases} F_1(\varphi_1(x_{k+1},..,x_n),..,\varphi_k(x_{k+1},..,x_n);x_{k+1},..,x_n) = 0 \\ F_2(\varphi_1(x_{k+1},..,x_n),..,\varphi_k(x_{k+1},..,x_n);x_{k+1},..,x_n) = 0 \\ ... \\ F_k(\varphi_1(x_{k+1},..,x_n),..,\varphi_k(x_{k+1},..,x_n);x_{k+1},..,x_n) = 0 \end{cases} \tag{8.6}$$

Diferențialele acestor funcții sunt nule pe U_0, în particular în punctul $(x_{0k+1},...,x_{0n})$.

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}d\varphi_1 + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_k}d\varphi_k + \frac{\partial F_1}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1} + ... + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}d\varphi_1 + ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_k}d\varphi_k + \frac{\partial F_2}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1} + ... + \frac{\partial F_2}{\partial x_n}dx_n = 0 \\ ... \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}d\varphi_1 + ... + \frac{\partial F_k}{\partial x_k}d\varphi_k + \frac{\partial F_k}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1} + ... + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}dx_n = 0 \end{cases} \tag{8.7}$$

Să considerăm în continuare funcția compusă $F: U_0 \to \mathbb{R}$ definită astfel:

$$F(x_{k+1},..,x_n) = f(\varphi_1(x_{k+1},..,x_n),..,\varphi_k(x_{k+1},..,x_n);x_{k+1},..,x_n) \tag{8.8}$$

Putem spune că dacă f are în x_0 un extrem condiționat de (8.2), atunci funcția F are în $(x_{0k+1},...,x_{0n})$ un extrem obişnuit.

Într-adevăr, $x_{01} = \varphi_1(x_{0k+1},..,x_{0n}),\dots x_{0k} = \varphi_k(x_{0k+1},..,x_{0n})$ şi dacă, de exemplu, x_0 este punct de maxim condiționat pentru f, avem:
$f(x_1,x_2,...,x_n) \le f(x_{01},x_{02},...,x_{0n})$

pentru orice punct $(x_1,...,x_n)$ care verifică (8.2) dintr-o vecinătate a lui $(x_{01},...,x_{0n})$. Atunci, pentru $(x_{k+1},...,x_n) \in U_0$, luând valorile $x_1,...,x_k$ date de (8.5), punctul $(x_1,...,x_k,x_{k+1},...,x_n)$ verifică sistemul (8.2) aşa cum rezultă din (8.6), iar inegalitatea precedentă se scrie, ținând seama de (8.7).

$$F(x_{k+1},...,x_n) \le F(x_{0k+1},...,x_{0n})$$

deci $(x_{0k+1},...,x_{0n})$ este punct de maxim local pentru F.

În acest caz, diferențiala acestei funcții în punctul $(x_{0k+1},...,x_{0n})$ este nulă.

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1}d\varphi_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}d\varphi_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}dx_{k+1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = 0 \tag{8.9}$$

Ținând seama de relațiile (8.7) şi (8.9), pentru orice sistem de numere $\lambda_1,...,\lambda_k$ avem egalitatea.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_1}\right)d\varphi_1 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)d\varphi_k + \\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right)dx_{k+1} + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)dx_n = 0\end{aligned} \tag{8.10}$$

unde toate derivatele sunt calculate în punctul x_0.

Vom alege numerele $\lambda_1,...,\lambda_k$ în aşa fel încât coeficienții diferențialelor $d\varphi_1,...,d\varphi_k$ să se anuleze

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_1}(x_0) = 0\\ ...\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x_0) = 0\end{cases} \tag{8.11}$$

Acest lucru este posibil deoarece determinantul sistemului (8.11) corespunzător necunoscutelor $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ este

$$\left.\frac{D(F_1,...,F_k)}{D(x_1,...,x_k)}\right|_{x=x_0} \neq 0$$

Cu aceste valori $\lambda_1,...,\lambda_k$ egalitatea (8.10) se scrie:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right) dx_n = 0 \qquad (8.12)$$

unde toate derivatele sunt calculate în x_0.

Pentru ca această egalitate să aibă loc pentru orice valori $dx_{k+1},...,dx_n$, este necesar şi suficient să se anuleze coeficienţii acestora, adică:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_{k+1}}(x_0) = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (8.13)$$

Egalităţile (8.11) şi (8.13) formează sistemul (8.3) care trebuia demonstrat.

<u>Observaţie</u>:---

Orice puncct $x_0 \in \overset{o}{E}$ care verifică sistemul (8.2) pentru care $\text{rang}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{i=\overline{1,k} \\ j=\overline{1,n}}} = k$ şi care verifică şi sistemul (8.3) pentru anumite valori $\lambda_1,...,\lambda_k$, se numeşte <u>punct staţionar al funcţiei f condiţionat de (8.2)</u>. Constantele $\lambda_1,...,\lambda_k$ se numesc <u>multiplicatorii lui Lagrange</u>. Acestea îşi schimbă valoarea odată cu punctul staţionar x_0.

Teorema demonstrată ne precizează că <u>orice punct de extrem condiţionat este punct staţionar condiţionat</u>.

Este bine de reținut că pentru determinarea punctelor de extrem pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(E - \text{deschisa})$, $f \in C^2(E)$, condiționate de sistemul (8.2) în care funcțiile $F_1,...,F_k \in C^2(E)$, se parcurg următoarele etape:

1) Se formează funcția ajutătoare

$$\Phi(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k) = f(x_1,...,x_n) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i F_i(x_1,...,x_n) \tag{8.14}$$

cu coeficienții $\lambda_1,...,\lambda_k$ nedeterminați.

2) Se formează sistemul de $n+k$ ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k) = 0 \\ ... \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n}(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_k) = 0 \\ F_1(x_1,...,x_n) = 0 \\ ... \\ F_k(x_1,...,x_n) = 0 \end{cases} \tag{8.15}$$

cu ajutorul căruia se determină punctele staționare condiționate ale funcției f, precum şi valorile $\lambda_1,...,\lambda_k$ corespunzătoare.

3) Dintre punctele staționare determinate, se selectează punctele de extrem local ale funcției f condiționate de (8.2), folosind funcția Φ. Mai întâi se observă că pentru un punct x_0 de extrem condiționat al funcției f, avem $F_i(x_0) = 0$, $i = \overline{1,k}$. Prin urmare pentru orice $x \in E$ care verifică condițiile (8.2) avem

$$\underline{f(x) - f(x_0) = \Phi(x) - \Phi(x_0)} \tag{8.16}$$

după cum rezultă din (8.14).

Studiul semnului diferenței $f(x) - f(x_0)$ pentru puncte x care verifică (8.2) se reduce la studiul diferenței $\Phi(x) - \Phi(x_0)$ pentru asemenea puncte.

Dacă punctul x_0 verifică sistemul (8.3) înseamnă că el este punct staționar obişnuit pentru funcția Φ, deci $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x_0) = 0$, $i = \overline{1,n}$.

Pe de altă parte, funcția Φ are derivate parțiale de ordinul doi continue într-o vecinătate a lui x_0. Prin urmare, putem scrie formula lui Taylor de ordinul doi:

$$\Phi(x) - \Phi(x_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\frac{x_i - x_{0i}}{\|x - x_0\|}\cdot\cdot\frac{x_j - x_{0j}}{\|x - x_0\|} + \frac{1}{2}\omega(x)\|x - x_0\|^2 \quad (8.17)$$

unde $\lim\limits_{x\to x_0} \omega(x) = \omega(x_0) = 0$

Semnul diferenței $\Phi(x) - \Phi(x_0)$ este dat de semnul formei pătratice:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\frac{x_i - x_{0i}}{\|x - x_0\|}\cdot\frac{x_j - x_{0j}}{\|x - x_0\|} \quad (8.18)$$

<u>Exemplu:</u> --

Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y \quad (8.19)$$

care verifică condiția

$$y - x = \frac{\pi}{4} \quad (8.20)$$

*) Formăm funcția ajutătoare

$$\Phi(x, y, \lambda) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda\left(y - x - \frac{\pi}{4}\right) \quad (8.21)$$

**) Determinăm punctele staționare ale acestei funcții din sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ y - x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} -2\cos x \sin x - \lambda = 0 \\ -2\cos y \sin y + \lambda = 0 \\ y - x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (8.22)$$

Prin adunarea primelor două relații din (8.22) obținem

$$\begin{cases} \sin 2x + \sin 2y = 0 \\ y - x = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \tag{8.23}$$

Acest sistem admite o infinitate de soluții

$$\begin{cases} x_k = -\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \\ y_k = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{cases} \text{ cu } k \in \mathbb{Z} \tag{8.24}$$

Funcția Φ admite o infinitate de puncte staționare.

***) Verificăm dacă punctul $(x_0, y_0) = \left(-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ este punct de extrem al funcției Φ.

Pentru acest punct, din sistemul (8.22) se deduce valaorea corespunzătoare a constantei λ, anume $\lambda_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Rămâne să precizăm semnul formei pătratice definită de funcția:

$$\Phi(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - x - \frac{\pi}{4}\right) \tag{8.23}$$

ținând seama de faptul că cele două variabile x şi y sunt legate prin relația

$$y - x = \frac{\pi}{4} \tag{8.24}$$

Prin eliminarea variabilei y între (8.23) şi (8.24) obținem:

$$\begin{cases} \Phi(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -2\cos 2x + 2\sin 2x \end{cases} \tag{8.25}$$

Deoarece $\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\left(-\dfrac{\pi}{8}\right) = -2\sqrt{2} < 0$, deducem că $\left(-\dfrac{\pi}{8}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ este punct de maxim local pentru funcția f condiționat de relația (8.20).

6.9. Exerciții rezolvate

1) Să se calculeze derivatele parțiale de ordinum I şi II pentru funcția $h : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$h(x,y) = g\left[x\sin y, x^2 + y^2\right] \tag{9.1}$$

unde $g \in C^2(Dg)$

Se observă că h este o funcție compusă de forma

$$h(x,y) = g\left[f_1(x,y), f_2(x,y)\right]$$

unde $f_1(x,y) = x\sin y$ şi $f_2(x,y) = x^2 + y^2$.

Conform formulei (3.15) de derivare a funcțiilor compuse, avem:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} = \sin y\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2x\frac{\partial g}{\partial f_2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial y} = x\cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2y\frac{\partial g}{\partial f_2}$$

Pentru calculul derivatelor parțiale de ordinul II, apelăm tot la formula (3.15) şi ținem seama de faptul că funcțiile $\frac{\partial g}{\partial f_1}$ şi $\frac{\partial g}{\partial f_2}$ depinde de x şi y la fel ca funcția g, adică prin $f_1(x,y)$ şi $f_2(x,y)$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin y\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2x\frac{\partial g}{\partial f_2}\right] = \sin y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\right) + 2\frac{\partial g}{\partial f_2} +$$

$$+ 2x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_2}\right) = \sin y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial f_1^{\ 2}}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2 \partial f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right] + 2\frac{\partial g}{\partial f_2} +$$

$$+ 2x\left[\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2^{\ 2}}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right] = \sin y\left[\sin y\frac{\partial^2 g}{\partial f_1^{\ 2}} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial f_2 \partial f_1}\right] +$$

$$+ 2\frac{\partial g}{\partial f_2} + +2x\left[\sin y\frac{\partial^2 f}{\partial f_1 \partial f_2} + 2x\frac{\partial^2 g}{\partial f_2^{\ 2}}\right]$$

Deci obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \sin^2 y \frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2} + 4x\sin y \frac{\partial^2 f}{\partial f_1 \partial f_2} + 4x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2} + 2\frac{\partial g}{\partial f_2}$$

La fel calculăm:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x\cos y \frac{\partial g}{\partial f_1} + 2y\frac{\partial g}{\partial f_2}\right] = -x\sin y \frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\right) + 2\frac{\partial g}{\partial f_2} +$$

$$+2y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial f_2}\right) = -x\sin y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2 \partial f_1}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right] + 2\frac{\partial g}{\partial f_2} +$$

$$+2y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right] = -x\sin y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y\left[x\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial f_2 \partial f_1}\right] +$$

$$+2\frac{\partial g}{\partial f_2} + 2y\left[x\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2}\right]$$

Deci obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -x\sin y\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2\frac{\partial g}{\partial f_2} + x^2\cos^2 y\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2} + 4xy\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2}$$

Pentru derivata parțială mixtă de ordinul II obținem:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x\cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2y\frac{\partial g}{\partial f_2}\right] = \cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\right) + 2y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial f_2}\right) =$$

$$= \cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2 \partial f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right] + 2y\left[\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right] =$$

$$= \cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\cos y\left[\sin y\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2} + 2x\frac{\partial^2 g}{\partial f_2 \partial f_1}\right] + 2y\left[\sin y\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 2x\frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2}\right]$$

Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \cos y\frac{\partial g}{\partial f_1} + x\sin y\cos y\frac{\partial^2 g}{\partial {f_1}^2} + 4xy\frac{\partial^2 g}{\partial {f_2}^2} + 2(x^2\cos y + y\sin y)\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}$$

2) Să se arate că funcția $h : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$h(x,y) = \frac{x}{y}\left[f(y) + g\left(\frac{y}{x}\right)\right] \tag{9.2}$$

unde $f \in C^2(Df)$ şi $g \in C^2(Dg)$, verifică ecuația cu derivate parțiale:

$$x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial h}{\partial y}=0 \tag{9.3}$$

Calculăm mai întâi derivatele parțiale de ordinul I.

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{y}\left(f(y)+g\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right]=\frac{1}{y}(f+g)+\frac{x}{y}g'\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{1}{y}(f+g)-\frac{1}{x}g'$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y}\left(f(y)+g\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right]=-\frac{x}{y^2}(f+g)+\frac{x}{y}\left(f'+g'\frac{1}{x}\right)=-\frac{x}{y^2}(f+g)+\frac{x}{y}f'+\frac{1}{y}g'$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul II având în vedere că f' şi g' depind de x şi y la fel ca funcțiile f şi g

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{y}(f+g)-\frac{1}{x}g'\right]=\frac{1}{y}g'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}g'-\frac{1}{x}g''\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{y}{x^3}g''$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x}{y^2}(f+g)+\frac{x}{y}f'+\frac{1}{y}g'\right]=-\frac{1}{y^2}(f+g)-\frac{x}{y^2}g'\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{1}{y}f'+$$

$$+\frac{1}{y}g''\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{1}{y^2}(f+g)+\frac{1}{xy}g'+\frac{1}{y}f'-\frac{1}{x^2}g''$$

Verificăm ecuația (9.3)

$$x^2\frac{y}{x^3}g''+xy\left[-\frac{1}{y^2}(f+g)+\frac{1}{xy}g'+\frac{1}{y}f'-\frac{1}{x^2}g''\right]-y\left[-\frac{x}{y^2}(f+g)+\frac{x}{y}f'+\frac{1}{y}g'\right]=0$$

$$\frac{y}{x}g''-\frac{x}{y}(f+g)+g'+xf'-\frac{y}{x}g''+\frac{x}{y}(f+g)-xf'-g'=0$$

Adevărat

3) Pentru funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=x\cos y+y\sin x \tag{9.4}$$

să se calculeze diferențialele df şi d^2f.

Conform formulelor (2.19) şi (4.1), în cazul de față putem scrie:

$$df=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]f=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(\cos y+y\cos x)dx+(-x\sin y+\sin x)dy$$

$$d^2f=\left[\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right]^2f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2=$$

$$=-y\sin x(dx)^2+2(-\sin y+\cos x)dxdy-x\cos y(dy)^2$$

4) Pentru funcția $h : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$h(x,y,z) = g\left[xyz, x^2 + y^2 + 3z^2\right] \tag{9.5}$$

unde $g \in C^2(Dg)$, să se calculeze dh şi d^2h.

Observăm că h este o funcție compusă de forma

$$h(x,y,z) = g\left[f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)\right]$$

unde $f_1(x,y,z) = xyz$ şi $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2$.

*) Calculăm diferențiala de primul ordin

$$dh = \left[\frac{\partial}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial}{\partial f_2}df_2\right]g = \frac{\partial g}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2}df_2 \tag{9.6}$$

Dar

$$\begin{aligned} df_1 &= \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right]f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz = \\ &= yzdx + xzdy + xydz \\ df_2 &= \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right]f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz = \\ &= 2xdx + 2ydy + 6zdz \end{aligned} \tag{9.7}$$

Înlocuind (9.7) în (9.6) obținem:

$$dh = \frac{\partial g}{\partial f_1}(yzdx + xzdy + xydz) + \frac{\partial g}{\partial f_2}(2xdx + 2ydy + 6zdz)$$

Astfel obținem:

$$\begin{aligned} dh &= \left(yz\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2x\frac{\partial g}{\partial f_2}\right)dx + \left(xz\frac{\partial g}{\partial f_1} + 2y\frac{\partial g}{\partial f_2}\right)dy + \\ &+ \left(xy\frac{\partial g}{\partial f_1} + 6z\frac{\partial g}{\partial f_2}\right)dz \end{aligned} \tag{9.8}$$

**) Calculăm diferențiala de ordinul II apelând la formula (4.9)

$$d^2h = \left[\frac{\partial}{\partial f_1}df_1 + \frac{\partial}{\partial f_2}df_2\right]^2 g + \left[\frac{\partial}{\partial f_1}d^2f_1 + \frac{\partial}{\partial f_2}d^2f_2\right]g$$

Obținem:

$$d^2h = \frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2}(df_1)^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}df_1 df_2 + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2}(df_2)^2 + \frac{\partial g}{\partial f_1}d^2 f_1 + \frac{\partial g}{\partial f_2}d^2 f_2 \qquad (9.9)$$

Avem de calculat diferențialele d^2f_1 şi d^2f_2.

$$d^2f_1 = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right]^2 f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(dy)^2 +$$
$$+ \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(dz)^2 + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}dydz = \qquad (9.10)$$
$$= 2zdxdy + 2ydxdz + 2xdydz$$
$$d^2f_2 = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right]^2 f_2 = 2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 6(dz)^2$$

Prin înlocuirea lui (9.7) şi (9.10) în (9.9), obținem:

$$d^2h = \frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2}[yzdx + xzdy + xydz]^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2}[yzdx + xzdy + xydz][2xdx + 2ydy$$
$$+ 6zdz] + \frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2}[2xdx + 2ydy + 6zdz]^2 + \frac{\partial g}{\partial f_1}[2zdxdy + 2ydxdz + 2xdxdz] +$$
$$+ \frac{\partial g}{\partial f_2}\left[2(dx)^2 + 2(dy)^2 + 6(dz)^2\right]$$

Astfel obținem:

$$d^2h = \left[y^2z^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 4xyz\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 4x^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 2\frac{\partial g}{\partial f_2}\right](dx)^2 +$$
$$+ \left[x^2z^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 4xyz\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 4y^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 2\frac{\partial g}{\partial f_2}\right](dy)^2 +$$
$$+ \left[x^2y^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 12xyz\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 36z^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 6\frac{\partial g}{\partial f_2}\right](dz)^2 +$$
$$+ \left[2xyz^2\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 2\left(2y^2z + 2x^2z\right)\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 8xy\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 2z\frac{\partial g}{\partial f_1}\right]dxdy +$$
$$+ \left[2xy^2z\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 2\left(6yz^2 + 2x^2y\right)\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 24xz\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 2y\frac{\partial g}{\partial f_1}\right]dxdz +$$
$$+ \left[2x^2yz\frac{\partial^2 g}{\partial f_1{}^2} + 2\left(6xz^2 + 2xy^2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial f_1 \partial f_2} + 24yz\frac{\partial^2 g}{\partial f_2{}^2} + 2x\frac{\partial g}{\partial f_1}\right]dydz$$

5) Pentru funcția $z: E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată implicit de ecuația:

$$xyz + \ln(xyz) - 1 = 0 \tag{9.11}$$

să se calculeze dz şi d^2z.

*) $dz = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]z = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$

Pentru calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ trebuie să apelăm la teorema funcțiilor implicite. În cazul nostru, ecuația (9.11). o putem scrie $F(x, y, z) = 0$, iar prin diferențiere avem:

$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$, adică

$$\left(yz + \frac{1}{x}\right)dx + \left(xz + \frac{1}{y}\right)dy + \left(xy + \frac{1}{z}\right)dz = 0$$

Cu precizarea că pe domeniul pe care lucrăm trebuie să avem îndeplinită condiția $xy + \frac{1}{z} \neq 0$, putem explicita diferențiala dz.

$$dz = -\frac{z}{x}dx - \frac{z}{y}dy \tag{9.12}$$

$$\text{Prin urmare } \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{z}{x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{y} \end{cases} \tag{9.13}$$

$$dz = -\frac{z}{x}dx - \frac{z}{y}dy \tag{9.14}$$

**) $d^2z = \left[\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right]^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul II folosind relațiile (9.13)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{z}{x}\right) = -\frac{x\frac{\partial z}{\partial x} - z}{x^2} = \frac{2z}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{z}{y}\right) = -\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z}{xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{z}{y}\right) = -\frac{y\frac{\partial z}{\partial y} - z}{y^2} = \frac{2z}{y^2}$$

Prin urmare,

$$d^2 z = \frac{2z}{x^2}(dx)^2 + \frac{2z}{xy}dxdy + \frac{2z}{y^2}(dy)^2 \tag{9.15}$$

6) Să se arate că funcția $z : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată implicit de ecuația:

$$(y+z)\sin z - y(x+z) = 0 \tag{9.16}$$

verifică ecuația cu derivate partiale:

$$z\sin z\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \tag{9.17}$$

Pentru calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$, folosim teorema funcțiilor implicite, deci diferențiem funcția din (9.16),

$$F(x,y,z) = (y+z)\sin z - y(x+z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 .$$

$$-ydx + (\sin z - x - z)dy + [(y+z)\cos z + \sin z - y]dz = 0$$

Pentru $(y+z)\cos z + \sin z - y \neq 0$, obținem:

$$dz = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y}dx + \frac{x+z-\sin z}{(y+z)\cos z + \sin z - y}dy$$

De aici deducem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{(y+z)\cos z + \sin z - y} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z-\sin z}{(y+z)\cos z + \sin z - y} \end{cases} \tag{9.18}$$

Introducând (9.18) în (9.17) se observă cu uşurință că ecuația este verificată.

7) Pentru funcția $f:(-1,+\infty)\to \mathbb{R},\ f(x)=\ln(1+x)$, să se scrie formula lui Taylor cu restul Lagrange, în vecinătatea punctului $x_0=0$.

Conform relației (5.10), în cazul de față, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange este:

$$\begin{aligned}&f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\\&+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\end{aligned},\ \theta\in(0,1) \tag{9.19}$$

Prin inducție, pentru derivate de un ordin k oarecare a funcției $f(x)=\ln(1+x)$, se obține:

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)\,!}{(1+x)^k} \tag{9.20}$$

deci avem

$$f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)\,! \tag{9.21}$$

Formula lui Taylor (9.19) se scrie:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}\frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{9.22}$$

8) Pentru funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=e^x\sin y$, să se scrie primii termeni ai formulei Taylor până la cei de gradul III inclusiv, în vecinătatea punctului $(0,0)\in\mathbb{R}^2$.

Dacă avem în vedere formula(5.17), pentru cazul de față, putem scrie:

$$\begin{aligned}&f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right]f(0,0)+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right]^2f(0,0)+\\&+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y\right]^3f(0,0)+R_3(x,y)\end{aligned}$$

Prin urmare, primii termeni ai formulei lui Taylor sunt

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2\right]$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)x^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)x^2y+\right. \tag{9.23}$$
$$\left.+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)xy^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)y^3\right]+R_3(x,y)$$

După ce calculăm toate derivatele parțiale de care avem nevoie, obținem

$$e^x\sin y=y+xy+\frac{1}{6}(3x^2y-y^3)+R_3(x,y) \tag{9.24}$$

9) Să se determine punctele de extrem local ale funcției $z:E\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definită implicit de ecuația

$$2x^2+y^2+z^2-2yz-2xz-2xy+$$
$$+2x+2y+2z-3=0 \tag{9.25}$$

*) Determinăm punctele staționare ale funcției $z(x,y)$ din sistemul:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases} \tag{9.26}$$

Expresiile acestor derivate le obținem cu ajutorul teoremei funcțiilor implicite.

Diferentiem (9.25)
$$(4x-2z-2y+2)dx+(2y-2z-2x+2)dy+(2z-2y-2x+2)dz=0$$

Pentru $z-y-x+1\neq 0$, obținem
$$dz=\frac{2x-z-y+1}{x+y-z-1}dx+\frac{y-z-x+1}{x+y-z-1}dy$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x - z - y + 1}{x + y - z - 1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y - z - x + 1}{x + y - z - 1} \end{cases} \tag{9.27}$$

Din condițiile (9.26) obținem:

$$\begin{cases} 2x - z - y + 1 = 0 \\ y - z - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z - 2 \\ y = 3z - 3 \end{cases} \tag{9.28}$$

Ținând seama şi de ecuația (9.25) obținem două puncte staționare pentru funcția z.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ pentru } z_1 = 2$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \text{ pentru } z_2 = 1$$

**) Verificăm dacă aceste puncte staționare sunt puncte de extrem local.

Folosim matricea $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

şi obținem

$$A(2,3,2) = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 1 > 0 \\ \Delta_2 = \dfrac{1}{2} > 0 \end{matrix}$$

deci $(x_1, y_1) = (2,3)$ este punct de minim local.

$$A(0,0,1) = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = -1 < 0 \\ \Delta_2 = \dfrac{1}{4} > 0 \end{matrix}$$

deci $(x_2, y_2) = (0,0)$ este punct de maxim local.

10) Să se determine punctele de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz \tag{9.29}$$

în domeniul $x, y, z > 0$, care verifică condiția

$$xyz = 1 \tag{9.30}$$

*) Formăm funcția ajutătoare

$$\Phi(x, y, z) = xy + xz + yz + \lambda(xyz - 1) \tag{9.31}$$

pentru care determinăm punctele staționare folosind sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \quad \text{adică} \quad \begin{cases} y + z + \lambda yz = 0 \\ x + z + \lambda xz = 0 \\ x + y + \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \tag{9.32}$$

Sistemul (9.32) are soluția <u>x=1, y=1, z=1</u> pentru $\underline{\lambda = -2}$.

**) Verificăm dacă $(1,1,1)$ este punct de extrem local al funcției Φ.

Având în vedere relația de legătură $xyz = 1$, funcția Φ o privim ca funcție de două variabile, de exemplu

$$\Phi(y, z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{y} + yz$$

Folosim matricea

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{y^3} & 1 \\ 1 & \dfrac{2}{z^3} \end{pmatrix}$$

atunci

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 3 > 0 \end{matrix}$$

Deci punctul $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ este punct de minim local (simplu) pentru funcția Φ sau <u>punct de minim local condiționat</u> pentru funcția f.

CAPITOLUL VII

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

7.1. Convergenţa simplă şi convergenţa uniformă a şirurilor de funcţii

Noţiunea de şir poate fi extinsă de la şirurile numerice sau şirurile de vectori din $\mathbb{R}^n$, la şiruri de funcţii. Vom considera mulţimea
$\mathcal{F} = \{f_k \mid f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}\}$

Dacă definim o corespondenţă între numerele naturale $k \in \mathbb{N}$ şi funcţiile $f_k \in \mathcal{F}$, putem spune că am definit şirul de funcţii notat prescurtat $(f_k)_{k \in N}$.

Definiţie:

Spunem că şirul de funcţii $(f_k)_{k \in N}$ este convergent în punctul $x_0 \in E$, dacă şirul de vectori din $\mathbb{R}^m$, $(f_k(x_0))_{k \in N}$ este convergent. (x_0 se numeşte punct de convergenţă al şirului).

Multimea $A \subset E$ formată din toate punctele de convergenţă ale şirului de funcţii, se numeşte mulţime de convergenţă a şirului.

Definiţie:

Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cu proprietatea $\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x)$ pentru $x \in A$, se numeşte funcţie limită a şirului şi se foloseste notaţia $f_k \to f$ (pentru $k \to \infty$) sau $\lim_{k \to \infty} f_k = f$.

Pentru şirurile de funcţii putem defini o convergenţă simplă (punctuală) pentru fiecare punct $x \in A$ luat separat, precum şi o convergenţă uniformă (globală) referitoare la ansamblul punctelor $x \in A$.

<u>Definiție:</u>

Spunem că şirul de funcții $(f_k)_{k\in N}$ <u>converge simplu pe mulțimea A</u> către funcția f şi notăm

$$(f_k)_{k\in N} \underset{A}{\overset{s}{\rightarrow}} f \tag{1.1}$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice $x \in A$, există un rang $N(\varepsilon, x)$ astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon, x)$ să avem $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>Definiție:</u>

Spunem că şirul de funcții $(f_k)_{k\in N}$ <u>converge uniform pe mulțimea A</u> către funcția f şi notăm

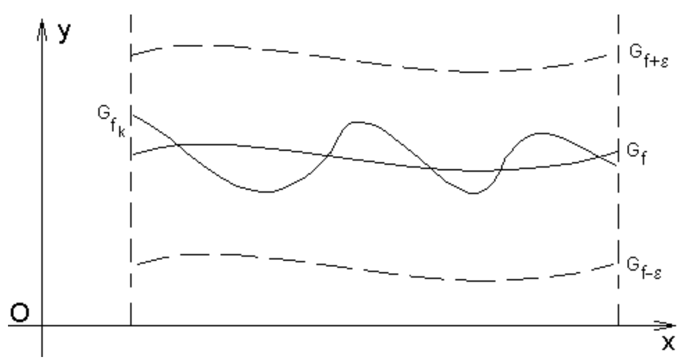
$$(f_k)_{k\in N} \underset{A}{\overset{u}{\rightarrow}} f \tag{1.2}$$

dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$, să avem $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon$.

<u>Observații</u>:--

1) Din definițiile date, observăm că în cazul convergenței uniforme, rangul $N(\varepsilon)$ depinde numai de alegerea lui ε, de funcția f şi mulțimea A, fiind acelaşi pentru orice $x \in A$.

În particular, pentru un şir de funcții $(f_k)_{k\in N}$ $f_k : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f_k)_{k\in N} \underset{A}{\overset{u}{\rightarrow}} f$ graficele funcțiilor f_k pentru orice $k > N(\varepsilon)$, aparțin unui domeniu din plan cuprins între graficele funcțiilor $f - \varepsilon$ şi $f + \varepsilon$ pentru orice $x \in I$.



2) Orice şir $(f_k)_{k\in N}$ uniform convergent către f pe mulţimea A este şi simplu conevrgent către f pe această mulţime. În general, reciproca nu este adevărată.

În continuare, vom da două criterii de convergenţă pentru şirurile de funcţii:

<u>Criteriul lui Cauchy</u>

Fie şirul $(f_k)_{k\in N}$, $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset E$ (mulţimea de convergenţă).

Şirul de funcţii $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{s} f$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $k, p > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$ să avem $\left\| f_k(x) - f_p(x) \right\| < \varepsilon$.

<u>Demonstraţie:</u>

"$\Rightarrow$" Din $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{s} f \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$ să avem

$$\left\| f_k(x) - f(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3}$$

Pentru $p > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$ putem scrie o condiţie asemănătoare

$$\left\| f_p(x) - f(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.4}$$

Folosim (1.3), (1.4) şi calculăm

$$\left\| f_k(x) - f_p(x) \right\| \le \left\| f_k(x) - f(x) \right\| + \left\| f(x) - f_p(x) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice $k, p > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$.

"$\Leftarrow$" Conform condiţiei $\left\| f_k(x) - f_p(x) \right\| < \varepsilon$ pentru orice $k, p > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$ putem spune că şirul de vectori din $\mathbb{R}^m$, $(f_k(x))_{k\in N}$ este un şir

Cauchy, deci convergent. Prin urmare, putem determina o funcție $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ astfel încât $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ pentru orice $x \in A$.

Deocamdată putem afirma că

$$(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{s} f \tag{1.5}$$

Fie un $p > N(\varepsilon)$. Din (1.5) avem:

$$(f_k - f_p)_{k\in N} \xrightarrow[A]{s} f - f_p \tag{1.6}$$

Cum pentru orice $k, p > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in A$ avem $\|f_k(x) - f_p(x)\| < \varepsilon$, prin trecere la limită avem

$$\|f(x) - f_p(x)\| < \varepsilon \ \ (\forall) \ x \in A \tag{1.7}$$

Cum $p > N(\varepsilon)$ a fost arbitrar ales, conform definiției, putem trage concluzia că $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{u} f$

<u>Criteriul comparației</u>

Fie şirul $(f_k)_{k\in N}$, $f_k, f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ precum şi un şir de numere pozitive $(a_k)_{k\in N}$.

Dacă:

1) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$
2) $\|f_k(x) - f(x)\| \le a_k \ \ (\forall) \ x \in A$ şi $(\forall) \ k \in N$

Atunci $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{u} f$.

Din $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall) \ \varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$ avem $a_k < \varepsilon$.

Atunci putem scrie $\|f_k(x) - f(x)\| \le a_k < \varepsilon$ pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$. Rezultă $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{u} f$.

Proprietăți ale funcțiilor şirului $(f_k)_{k\in N}$ care se transmit funcției limită f sunt date de următoarele teoreme:

Teorema 1

Fie şirul $(f_k)_{k\in N}$, $f_k, f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A \subset E$ mulțimea de convergentă.

Dacă:

1) $(f_k)_{k\in N} \underset{A}{\overset{u}{\to}} f$

2) f_k sunt continue în $x_0 \in A$ $(k \in N)$

Atunci: f este continuă în x_0.

Demonstrație:

Din $(f_k)_{k\in N} \underset{A}{\overset{u}{\to}} f \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in A$ avem

$$\|f_k(x) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.8}$$

În particular, pentru $x_0 \in A$ avem:

$$\|f_k(x_0) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.9}$$

Din f_k continuă în $x_0 \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta(\varepsilon)$ astfel încât pentru $(\forall)$ $x \in A$, $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ avem

$$\|f_k(x) - f_k(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.10}$$

Folosind aceste trei inegalități, deducem că pentru $x \in A$, $\|x - x_0\| < \delta_\varepsilon$ avem

$$\|f(x) - f(x_0)\| \le \|f(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f_k(x_0)\| + \|f_k(x_0) - f(x_0)\| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

deci f este continuă în x_0.

Observație:--

Această proprietate ne arată că dacă $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A]{u} f$, atunci în orice punct $x_0 \in A$ în care toate funcțiile f_k sunt continue, are loc relația de permutabilitate a limitelor

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\lim_{k\to\infty} f_k(x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_k(x)} \tag{1.11}$$

Teorema 2

Fie șirul $(f_k)_{k\in N}$, $f_k, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dacă:

1) $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[I]{u} f$

2) f_k continue pe I, $k \in N$

Atunci: pentru orice interval $[\alpha,\beta] \subset I$ are loc egalitatea

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f_k(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx \tag{1.12}$$

Observație:--

Această proprietate ne arată că putem calcula aproximativ integrala pe $[\alpha,\beta]$ a funcției limită f, calculând integrala funcției f_k care reprezintă o aproximație a funcției f. Condiția esențială este ca şirul $(f_k)_{k\in N}$ să conveargă uniform către f.

Egalitatea (1.12) se mai scrie:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta \left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right]dx = \lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f_k(x)dx} \tag{1.13}$$

Demonstrație:

Din f_k continue pe I, rezultă, conform primei proprietăți, că f este continuă pe I, deci integrabilă pe I.

Din $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[I]{u} f$, conform definiției, putem spune că pentru orice $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in I$ avem

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha} \tag{1.14}$$

Calculăm:

$$\left|\int_\alpha^\beta f_k(x)dx - \int_\alpha^\beta f(x)dx\right| = \left|\int_\alpha^\beta [f_k(x) - f(x)]dx\right| \le \int_\alpha^\beta |f_k(x) - f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta dx = \varepsilon$$

pentru orice $x \in I$ şi orice $k > N_\varepsilon$. Rezultă că:

$$\lim_{k\to\infty}\int_\alpha^\beta f_k(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$$

<u>Consecință:</u>
Dacă notăm

$$F_k(x) = \int_{x_0}^x f_k(t)dt \text{ şi } F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$$

unde x_0, $x \in [\alpha, \beta]$, atunci avem:

$$(F_k(x))_{k\in N} \xrightarrow[{[\alpha,\beta]}]{u} F(x) \tag{1.15}$$

Se reia demonstrația teoremei înlocuind pe α cu x_0 şi pe β cu x. Se obține $|F_k(x) - F(x)| < \varepsilon$ pentru $k > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $x \in [\alpha, \beta]$.

<u>Teorema 3</u>

Fie şirul $(f_k)_{k\in N}$, $f_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dacă:

a) f_k sunt derivabile cu f_k' continue pe I

b) pentru $x_0 \in I$ şirul $(f_k(x_0))_{k\in N}$ convergent

c) $(f_k')_{k\in N} \xrightarrow[I]{u} g$

Atunci:

a) $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[I]{u} f$

b) f este derivabilă pe I şi $f' = g$ pe I.

Observație:--

Această teoremă ne spune că în condițiile impuse, avem:

$$\boxed{\left(\lim_{k\to\infty} f_k\right)' = \lim_{k\to\infty} f_k'} \qquad (1.16)$$

Demonstrație:

Avem $f_k(x) = \int_{x_0}^{x} f_k'(t)dt + f_k(x_0)$ cu $x_0, x \in I$ şi prima afirmație rezultă din consecința teoremei precedente. Tot de acolo rezultă că $f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt + f(x_0)$, deci f este derivabilă şi $f' = g$.

7.2. Aproximarea uniformă a funcțiilor continue

În unele cazuri se pune problema aproximării (uniforme) a unei funcții cu altele aparținând unei mulțimi mai restrânse de funcții.
Un exemplu este dat de:

Teorema lui Weierstrass

Orice funcție f continuă pe un interval compact $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ este limita uniformă pe I a unui şir de polinoame $(P_k)_{k\in N}$, adică există un şir de polinoame care converge uniform pe I către f.

$(P_k)_{k\in N} \xrightarrow[I]{u} f$

Observație:--

a) Teorema afirmă doar că pentru o funcție continuă există un şir de polinoame uniform convergent către f, dar nu ne dă un procedeu de calcul pentru aceste polinoame.

b) Pentru o funcție f continuă pe I se pot determina mai multe şiruri de polinoame care să conveargă uniform către f.

Polinoamele lui Bernstein formează doar unul din aceste şiruri. În cele ce urmează vom arăta cum se construiesc aceste polinoame.

Considerăm cazul $[a,b]=[0,1]$.

Pentru fiecare $k \in N$, fie polinomul

$$P_k^*(x)=\sum_{n=0}^{k} f\left(\frac{n}{k}\right) C_k^n (1-x)^{k-n} \tag{2.1}$$

Observăm că pentru orice $k \in N$ avem egalitatea

$$\sum_{n=0}^{k} C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = 1 \tag{2.3}$$

care se obține aplicând formula binomului lui Newton pentru $[x+(1-x)]^k$.

Atunci, putem stabili egalitatea

$$\boxed{\sum_{n=0}^{k} n C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = kx} \tag{2.4}$$

Într-adevăr, avem

$$\sum_{p=0}^{k-1} C_{k-1}^p x^p (1-x)^{k-1-p} = 1 \text{ sau}$$

$$\sum_{p=0}^{k-1} kx C_{k-1}^p x^p (1-x)^{k-1-p} = kx \text{ (prin înmulțire cu } kx\text{)}$$

Punând $n=p+1$ şi având în vedere că $kC_{k-1}^{n-1}=nC_k^n$, rezultă (2.4).

De asemenea, avem şi egalitatea

$$\boxed{\sum_{n=0}^{k} n(n-1) C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = k(k-1)x^2} \tag{2.5}$$

Înmulțim (2.3) cu k^2x^2, (2.4) cu $-(2kx-1)$ şi adunăm rezultatele cu (2.5). Obținem:

$$\sum_{n=0}^{k} (n-kx)^2 C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = kx(1-x) \tag{2.6}$$

Deoarece $kx(1-x) \geq 0$ pentru orice $x \in [0,1]$, acestă funcție având un maxim pentru $x = \frac{1}{2}$, deducem:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{k} (n-kx)^2 C_k^n x^n (1-x)^{k-n} \leq \frac{k}{4}} \tag{2.7}$$

Înmulțim (2.3) cu $f(x)$ şi apoi scădem (2.1) din rezultatul obținut.

$$f(x) - P_k^*(x) = \sum_{n=0}^{k} \left[f(x) - f\left(\frac{n}{k}\right) \right] C_k^n x^n (1-x)^{k-n} \tag{2.8}$$

Deoarece $C_k^n x^n (1-x)^{k-n} \geq 0$ pentru $x \in [0,1]$, avem

$$\boxed{f(x) - P_k^*(x) \leq \sum_{n=0}^{k} \left| f(x) - f\left(\frac{n}{k}\right) \right| C_k^n x^n (1-x)^{k-n}} \tag{2.9}$$

Pe de altă parte, funcția f fiind uniform continuă pe $[0,1]$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$ dacă $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$.

De asemenea, f fiind funcție continuă pe compactul $[0,1]$ este şi mărginită pe acest interval, deci există un număr $M > 0$ astfel încât $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in [0,1]$.

Să considerăm o valoare fixă, dar arbitrară a lui x în $[0,1]$.

Dacă S este suma din inegalitatea (2.9), fie descompunerea $S = S_1 + S_2$ unde S_1 este suma termenilor corespunzători valorilor lui n pentru care $\left| x - \frac{n}{k} \right| < \delta_\varepsilon$, iar S_2 este suma celorlalți termeni. Avem

$$S_1 < \sum_{n=0}^{k} \frac{\varepsilon}{2} C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = \frac{\varepsilon}{2},\ (\forall)\ k \in N.$$

Deoarece $\left| f(x) - f\left(\frac{n}{k}\right) \right| \leq 2M$ iar $\frac{(n-kx)^2}{k^2 \delta_\varepsilon^2} \geq 1$ şi ținând seama de (2.7), rezultă

$$S_2 \leq \sum_{n=0}^{k} \frac{(n-kx)^2}{k^2 \delta_\varepsilon^2} 2M C_k^n x^n (1-x)^{k-n} = \frac{2M}{k^2 \delta_\varepsilon^2} \sum_{n=0}^{k} (n-kx)^2 C_k^n x^n (1-x)^{k-n} < \frac{M}{2k\delta_\varepsilon^2}$$

Notând $k_0 = \dfrac{M}{\varepsilon\delta_\varepsilon}$, avem

$S_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ pentru $k > k_0$.

Deci, putem spune că pentru $k > k_0$ avem

$S = S_1 + S_2 < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, adică $\left|f(x) - P_k^*(x)\right| < \varepsilon \ (\forall)\ x \in [0,1]$.

deci şirul de polinoame $\left(P_k^*\right)_{k\in N} \underset{[0,1]}{\overset{u}{\to}} f$

În cazul unui interval oarecare $[a,b]$, se face schimbarea de variabilă

$x = a + (b-a)y$ cu $y \in [0,1]$ (2.10)

Funcția $g(y) = f(a + (b-a)y)$ este continuă pe $[0,1]$, deci şirul de polinoame $\left(P_k^*\right)_{k\in N} \underset{[0,1]}{\overset{u}{\to}} g$

Notând

$$P_k(x) = P_k^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \qquad (2.11)$$

rezultă că $\left(P_k\right)_{k\in N} \underset{[a,b]}{\overset{u}{\to}} f$

<u>7.3. Convergența simplă şiconvergența uniformă a unei serii de funcții</u>

Pornind de la şirul de funcții $\left(f_k\right)_{k\in N}$ cu $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, putem considera <u>seria</u> <u>de</u> <u>funcții</u> $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ formată cu ajutorul termenilor şirului. De asemenea vom considera sumele parțiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \ (n \in N)$, deci pentru fiecare $n \in N$ vom obține o <u>funcție</u>:

$s_n : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cu $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, $x \in E$.

Definiție:

Seria de funcții $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **este** **convergentă** **într-un punct** $x_0 \in E$**, dacă şirul sumelor parțiale** $(s_n)_{n\in N}$ **este un şir de funcții convergent în** x_0**. În acest caz, spunem că** **x_0 este punct de convergentă al seriei.**

Mulțimea $A \subset E$ **formată din toate punctele de convergentă a seriei** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **se numeşte** **mulțimea de convergentă a seriei de funcții.**

Definiție:

Seria de funcții $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **este** **absolut convergentă în $x_0 \in E$**, **dacă seria de vectori din** $\mathbb{R}^m$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ **este absolut convergentă.**

Ca şi în cazul şirurilor de funcții, în cazul unei serii de funcții putem defini noțiunile de convergență simplă (punctuală) şi convergență uniformă (globală).

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ cu $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, funcția $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $A \subset E$ mulțimea de convergență a seriei.

Definiție:

Seria de funcții $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ **converge simplu (uniform) pe mulțimea** A **către funcția** f **(notăm** $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)} f$**) dacă şirul sumelor parțiale** $(s_n)_{n\in N}$ **converge simplu (uniform) pe mulțimea** A **către** f**.**

Funcția f se numeşte suma seriei de funcții pe mulțimea A şi notăm

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = f$$

Fie seria de funcții

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} = f_{n+1} + f_{n+2} + ... + f_{n+p} + ... \qquad (3.1)$$

numită <u>restul de ordinul n al seriei</u> $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Dacă această serie este convergentă pe mulțimea A, vom nota cu R_n suma sa. Astfel obținem funcția $R_n : A \subset E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cu

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x), \ x \in A$$

<u>Propoziția 1</u>

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)} f$ dacă şi numai dacă restul său de orice rang n, $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)}$

<u>Demonstrație</u>:

Pentru seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$, fie suma parțială $s_m = \sum_{k=1}^{m} f_k$, iar pentru seria $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$, fie suma parțială $\sigma_p = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k$.

Între aceste sume parțiale putem scrie relația:

$$\boxed{s_{n+p} = s_n + \sigma_p} \qquad (3.2)$$

Din această egalitate deducem că şirul de funcții $(s_{n+p})_{p\in N} \xrightarrow[A]{s(u)}$ dacă şi numai dacă şirul $(\sigma_p)_{p\in N} \xrightarrow[A]{s(u)}$.

Altfel spus, seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)}$ dacă şi numai dacă seria $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)}$.

Din demonstrație rezultă că, dacă un singur rest converge simplu (uniform) pe A, atunci seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)}$. În această situație, putem afirma că orice rest converge simplu (uniform) pe A.

Dacă notăm cu f suma seriei $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ şi cu R_n suma resturilor de ordinul n, $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k$ atunci avem relația:

$$\boxed{f = s_n + R_n} \tag{3.3}$$

Propoziția 2

Seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)} f$ dacă şi numai dacă şirul resturilor $(R_n)_{n\in N} \xrightarrow[A]{s(u)} 0$

Demonstrație:
Din egalitatea (3.3) avem:

$$\boxed{R_n = f - s_n} \tag{3.4}$$

"$\Rightarrow$" Conform definiției, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{s(u)} f \Rightarrow$ şirul $(s_n)_{n\in N} \xrightarrow[A]{s(u)} f \Rightarrow$ şirul $(s_n - f)_{n\in N} \xrightarrow[A]{s(u)} 0 \Rightarrow$ şirul $(R_n)_{n\in N} \xrightarrow[A]{s(u)} 0$

"$\Leftarrow$" Demonstrația foloseşte tot egalitatea (3.4).

Având în vedere faptul că convergența uniformă a unei serii de funcții implică convergentă simplă, vom da două criterii de convergentă uniformă.

Criteriul lui Cauchy

Seria de funcții $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{u}$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $k > N(\varepsilon)$, orice $p \ge 1$ $(p \in N)$ şi orice $x \in A$ avem $\left\| f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + ... + f_{k+p}(x) \right\| < \varepsilon$.

Demonstrația: rezultă din criteriul lui Cauchy aplicat şirului sumelor parțiale deoarece:

$$f_{k+1}(x) + ... + f_{k+p}(x) = s_{k+p}(x) - s_k(x) \tag{3.5}$$

Criteriul lui Weierstrass

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ cu $f_k : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ cu $a_k \in \mathbb{R}^+$

Dacă:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ este convergentă

b) $\|f_k(x)\| \leq a_k$ pentru $(\forall)$ $k \in N$ şi $(\forall)$ $x \in A \subset E$.

Atunci: seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniform pe mulțimea A.

Demonstrație:

Din $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergentă $\Rightarrow$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)$ $p \geq 1$ $(p \in N)$ avem

$$a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+p} < \varepsilon \tag{3.6}$$

Putem scrie că

$$\|f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + ... + f_{k+p}(x)\| \leq \|f_{k+1}(x)\| + \|f_{k+2}(x)\| + ... + \|f_{k+p}(x)\| \leq$$
$$\leq a_{k+1} + a_{k+2} + ... + a_{k+p} < \varepsilon$$

pentru $(\forall)$ $k > N(\varepsilon)$, $(\forall)$ $p \geq 1$ $(p \in N)$ şi $(\forall)$ $x \in A$.

Rezultă, conform criteriului Cauchy că seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge uniform pe mulțimea A.

Ca şi în cazul şirurilor de funcții, seriile de funcții se prezintă ca un procedeu de descriere aproximativă a funcției sumă. De aceea, prin teoremele următoare, vom sublinia proprietăți ale funcțiilor f_k (termenii seriei) care se transmit funcției sumă f.

<u>Teorema 1</u>

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ cu $f_k : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Dacă:

a) seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[A]{u} f$

b) f_k sunt funcţii continue în $x_0 \in A$

Atunci: funcţia f este continuă pe x_0

Într-adevăr, să considerăm sumele parţiale $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Acestea sunt funcţii continue în x_0 şi din faptul că şirul $(s_n)_{n\in N} \xrightarrow[A]{u} f$, conform teoremei corespunzătoare de la şirurile de funcţii, deducem că f este continuă în x_0.

<u>Teorema 2</u>

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ cu $f_k, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dacă:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[I]{u} f$

b) f_k sunt funcţii continue pe I

Atunci: pentru orice interval $[\alpha, \beta] \subset I$ avem:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)dx \tag{3.7}$$

<u>Observaţie</u>:---

Egalitatea (3.7) se mai poate scrie:

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_k(x)dx} \tag{3.8}$$

astfel că această teoremă se mai numeşte teorema de integrare termen cu termen a seriilor de funcții

Pentru demonstrație se aplică teorema corespunzătoare şirului sumelor parțiale $(s_n)_{n\in N}$.

Teorema 3

Fie seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ cu $f_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Dacă:

a) f_k sunt derivabile cu f_k' continue pe I

b) pt. $x_0 \in I$, seria $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ este convergentă

c) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k' \xrightarrow[I]{u} g$

Atunci:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \xrightarrow[I]{u} f$

b) f este derivabilă pe I şi $f' = g$ pe I.

Observație:---

Această teoremă ne spune că în condițiie impuse avem:

$$\boxed{\left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'} \tag{3.9}$$

de aceea, această teoremă se numeşte teorema de derivare termen cu termen a seriilor de funcții

Pentru demonstrație, aplicăm teorema corespunzătoare şirului sumelor parțiale $(s_n)_{n\in N}$.

<u>7.4. Serii de puteri</u>

O serie de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ în care $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = C_k (x - x_0)^k$, $k \geq 0$, C_k şi $x_0 \in \mathbb{R}$ (date) se numeşte <u>serie</u> <u>de</u> <u>puteri</u> şi o notăm cu:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k}$$

Sumele parțiale ale unei serii de puteri sunt polinoame şi de aceea, dacă o funcție este aproximată prin sumele parțiale ale unei serii de puteri, atât calculul valorilor funcțiilor aproximate cât şi derivarea sau integrarea termen cu termen se efectuează foarte uşor.

Despre mulțimea de convergență, A, a unei serii de puteri putem spune că $A \neq \emptyset$ deoarece ea conține cel puțin punctul x_0. Informații ne sunt date de:

<u>Teorema lui Abel</u>

Pentru orice serie de puteri $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$ există un număr R numit <u>raza de convergență</u> $(0 \leq R \leq +\infty)$ astfel încât avem:

1) pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| < R$, seria este absolut convergentă

b) pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| > R$, seria este divergentă

c) pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| \leq r < R$, seria este uniform convergentă

<u>Observație</u>:--

1) Intervalul $(x_0 - R, x_0 + R)$ se numeşte <u>interval de convergență al seriei de puteri</u>.
2) Teorema nu ne spune care este natura seriei la capetele intervalului de convergență. Verificarea se face direct.
3) Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mulțimea de convergență a seriei, atunci $(x_0 - R, x_0 + R) \subset A \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$.

Demonstrație:

1) Fie un punct $x_1 \in \mathbb{R}$ în care seria de puteri este convergentă şi arătăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ seria este absolut convergentă.

Din $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x_1 - x_0)^k$ convergentă $\Rightarrow$ şirul $\left(C_k (x_1 - x_0)^k\right)_{k \in N} \to 0$ (conform condiției necesare de convergență) $\Rightarrow$ $(\exists)$ $M > 0$ astfel încât:

$$\left|C_k (x_1 - x_0)^k\right| \le M \quad (\forall) \ k \in N \tag{4.1}$$

Calculăm:

$$\left|C_k (x - x_0)^k\right| = \left|C_k (x_1 - x_0)^k\right| \cdot \left|\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^k\right| \le M \left|\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right|^k = Mq^k, \ k \in N$$

Dar pentru $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ avem $q \in (0,1)$.

Folosim criteriul comparației de la seriile cu termeni pozitive, din convergența seriei geometrice cu rația subunitară, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, rezultă că seria $\sum_{k=0}^{\infty} \left|C_k (x - x_0)^k\right|$ este convergentă, deci seria $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$ este absolut convergentă.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ este mulțimea de convergență a seriei de puteri, notăm $R = \max_{x_i \in A} |x_i - x_0|$

Conform celor demonstrate, putem spune că seria este absolut convergentă pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| < R$.

2) Fie un punct $x_2 \in \mathbb{R}$ în care seria este divergentă şi arătăm că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$ seria este divergentă.

Într-adevăr, dacă x ar fi punct de convergentă pentru serie, conform rezultatului precedent, ar trebui ca x_2 să fie punct de convergență ceea ce este fals.

Rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $|x - x_0| > R$ seria este divergentă.

3) Fie $x \in \mathbb{R}$ pentru care $|x - x_0| \le r < R$. Calculăm $|C_k(x - x_0)^k| = |C_k| \cdot |(x - x_0)|^k \le |C_k| r^k$. Cum seria $\sum_{k=0}^{\infty} |C_k| r^k$ este convergentă fiind seria modulelor seriei de puteri calculate în punctul $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ pentru care $|x_1 - x_0| = r$, convergența uniformă rezultă din criteriul lui Weierstrass.

Referitor la calculul razei de convergență pentru o serie de puteri, răspunsul este dat de:

Teorema Cauchy-Hadamard

Dacă R este raza de convergență a seriei de puteri $\sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k$ atunci:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|}}$$

Demonstrație:

Considerăm seria modulelor şi aplicăm criteriul radicalului pentru seriile cu termeni pozitivi.

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k (x - x_0)^k|} = |x - x_0| \cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|} = L$$

Conform criteriului, seria este convergentă dacă $L < 1$, adică $|x - x_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|}}$.

De asemenea seria este divergentă dacă $L > 1$, adică $|x - x_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|}}$.

Conform teoremei lui Abel, rezultă că:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|C_k|}} \tag{4.2}$$

Fie seria de puteri $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k$, R - raza de convergentă, A - mulțimea de convergență şi funcția sumă $S : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k, \ x \in A \tag{4.3}$$

Din proprietățile seriilor de funcții uniform convergentte, putem reține următoarele

Proprietăți ale seriilor de puteri

1) <u>Suma unei serii de puteri este o funcție continuă în toate puncctele de convergență</u>.

Astfel, dacă cunoaştem suma seriei numai pentru puncte $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ şi dacă, de exemplu, $x_0 - R$ este punct de convergență al seriei, atunci avem posibilitatea de a calcula suma seriei şi în acest punct prin trecere la limită.

$$S(x_0 - R) = \lim_{x \to x_0 - R} S(x) \tag{4.4}$$

2) <u>Seria derivatelor are aceeaşi rază de convergență</u>. Funcția sumă S este derivabilă pe intervalul de convergență şi derivata S' este egală cu suma derivatelor. Putem scrie:

$$\left[\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty}\left[C_k(x-x_0)^k\right]' \text{ adică}$$

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[C_k(x-x_0)^k\right]' = \sum_{k=1}^{\infty} kC_k(x-x_0)^{k-1} \tag{4.5}$$

pentru $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

Într-adevăr, dacă pentru seria $\sum_{k=0}^{\infty} C_k(x-x_0)^k$ raza sa de convergență este $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}}$, pentru seria derivatelor, $\sum_{k=0}^{\infty} kC_k(x-x_0)^{k-1}$, putem spune că raza de convergentă R_1 este

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k|C_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{k} \cdot \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|C_k|}} = R$$

3) Dacă seriile de puteri $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ şi $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$ au razele de convergență R_1 respectiv R_2, atunci

*) Seria sumă $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)(x - x_0)^k$ are raza de convergență $R \geq \min\{R_1, R_2\}$

**) Seria $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k (x - x_0)^k$ cu $\alpha \in \mathbb{R}$, are raza de convergență $R = R_1$.

<u>Exemplu:</u> ---

Pentru seria $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ să se determine mulțimea de convergență precum şi suma sa pe această mulțime.

a) Calculăm <u>raza de convergență</u>:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{k} = 1$$

Prin urmare, <u>intervalul de convergență</u> al seriei este $(-1,1)$.

b) Determinăm <u>mulțimea de convergență</u> A, verificând natura seriei la capetele intervalului de convergență.

În <u>$x = -1$</u> seria este $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ şi este convergentă fiind seria armonică alternată.

În <u>$x = 1$</u> seria este $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, deci divergentă

Rezultă că mulțimea de convergență este

$$\boxed{A = [-1,1)}$$

c) Calculăm suma seriei în punctele de convergență

Pentru $x\in(-1, 1)$ notăm

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \tag{4.6}$$

Deoarece pe orice compact din acest interval seria este uniform convergentă, putem folosi teorema de derivare termen cu termen a seriilor şi avem

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k}\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}=\frac{1}{1-x} \tag{4.7}$$

deoarece am obținut o serie geometrică cu rația subunitară. Prin intergrare, avem

$$S(x)=\int\frac{dx}{1-x}=-\ln|1-x|+C \tag{4.8}$$

Determinarea constantei arbitrare C se poate face dând o valoare particulară lui x. Folosind (4.6) şi (4.8), pentru $x=0$, obținem $C=0$.

Deci,

$$S(x)=-\ln|1-x| \text{ pentru } x\in(-1,1) \tag{4.9}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=-\ln|1-x|} \text{ pentru } x\in(-1,1) \tag{4.10}$$

Deoarece $x=-1$ este punct de convergență al seriei, putem obține şi suma seriei numerice $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$ folosind continuitatea în -1 a funcției sumă

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}=\lim_{x\to-1}S(x)=-\ln 2$$

Deci

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\ln 2} \tag{4.11}$$

7.5. Dezvoltarea unei funcții în serie Taylor

Fie o funcție $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinit derivabilă în punctul $x_0 \in I$. Cu ajutorul ei, putem construi seria de puteri.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \qquad (5.1)$$

unde coeficienții $C_k \in \mathbb{R}$ sunt dați de

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ k \in \mathbf{N} \qquad (5.2)$$

Seria (5.1) se numeşte seria Taylor a funcției f în punctul x_0.

Seria (5.1) are o rază de convergență R, $(0 \le R \le +\infty)$, o mulțime de convergență, A, care conține cel puțin punctul x_0 şi un interval de convergență $(x_0 - R, x_0 + R) \subset A$.

Suma S a seriei (5.1) este o funcție definită pe mulțimea A,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,\ x \in A \qquad (5.3)$$

Putem scrie

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

adică

$$S(x) = S_n(x) + \rho_n(x),\ x \in A \qquad (5.4)$$

unde $S_n(x)$ este suma parțială de ordinul n, iar $\rho_n(x)$ este restul de ordinul n al seriei.

Evident $(S_n)_{n\in N} \to S$ pe mulțimea A.

Formula lui Taylor de ordinul n ataşată funcției f în punctul x_0 se scrie:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ x \in I \qquad (5.5)$$

unde $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(x)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ este polinomul Taylor de gradul n, iar $R_n(x)$ este restul de ordinul n al formulei lui Taylor.

Pentru $x \in A \cap I$, relația (5.5) se scrie:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x) \qquad (5.6)$$

Se pune întrebarea dacă $f(x) = S(x)$ pentru $x \in A \cap I$, adică dacă suma seriei Taylor (5.1) pe mulțimea $A \cap I$ este chiar funcția f. Răspunsul este dat de următoarea teoremă:

Teoremă

Seria Tylor a funcției f în x_0 este convergentă într-un punct $x \in A \cap I$ către valoarea $f(x)$ a funcțiiei f în x, dacă şi numai dacă valorile în x ale resturilor R_n ale formulei lui Taylor formează un şir $(R_n(x))_{n \in N}$ convergent către zero.

Demonstrație:

Într-adevăr, din egalitatea (5.6) deducem

$$f(x) - S_n(x) = R_n(x),\ x \in A \cap I$$

$$\lim_{n\to\infty}[f(x) - S_n(x)] = \lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

$$f(x) - S(x) = \lim_{n\to\infty} R_n(x),\ x \in A \cap I$$

Deci $f(x) = S(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0\ (\forall)\ x \in A \cap I$.

Egalitatea:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k,\ x \in A \cap I} \qquad (5.6)$$

se numeşte formula de dezvoltare a funcției f în serie Taylor în vecinătatea punctului x_0.

În cele ce urmează, vom pune în evidență dezvoltările în serie Taylor în vecinătatea originii pentru funcțiile elementare.

1) $f(x) = \sin x$, $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$

Vom construi o serie de puteri de forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(o)}{n!} x^n \qquad (5.7)$$

Pentru funcția $f(x) = \sin x$, prin inducție matematică, se arată că

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$$

şi deducem

$$f^{(n)}(0) = \sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad n = 2k \\ (-1)^k & \text{pentru} \quad n = 2k+1 \end{cases} \qquad (5.8)$$

În cazul de față, seria de puteri (5.7) este

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad (5.9)$$

Raza de convergență a acestei serii este

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{1}{(2k+1)!}}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{(2k+3)!}{(2k+1)!} = \lim_{k\to\infty}(2k+2)(2k+3)$$

$$R = \infty$$

Restul de ordinul n al formulei lui Taylor sub forma dată de Lagrange este:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Cum

$|R_n(x)| \le \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \to 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$ din cauza factorialului de la numitor, putem spune că am obținut seria funcției $f(x) = \sin x$ şi avem:

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \ R = \infty} \qquad (5.10)$$

2) $\underline{f(x) = \cos x}$, $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$

Pentru derivata de ordin n oarecare a acestei funcții obținem:

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$$

de unde

$$f^{(n)}(0) = \cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k & \text{pentru} \quad n = 2k \\ 0 & \text{pentru} \quad n = 2k+1 \end{cases} \tag{5.11}$$

Obținem seria de puteri

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{5.12}$$

a cărei raza de convergență este

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{1}{(2k)!}}} = \lim_{k\to\infty}(2k+2)(2k+1) = \infty$$

În cazul de față

$$R_n(x) = \frac{\cos\left(\theta x + \dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

şi avem:

$$|R(x)| \le \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \to 0\,;\ (\forall)\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Atfel, obținem dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = \cos x$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},\ R = \infty} \tag{5.13}$$

3) $\underline{f(x) = e^x}$, $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

Cum $f^{(k)}(x) = e^x$, iar $f^{(k)}(0) = 1$, obținem seria de puteri

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \tag{5.14}$$

Raza de convergență a acestei serii este

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{1}{k!}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{k!} = \infty$$

iar restul de ordinul n al formulei lui Taylor este

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Cum

$|R_n(x)| = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\left|x^{n+1}\right| \to 0$ pentru $x \in \mathbb{R}$ avem seria funcției exponențiale.

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},\ R = \infty} \tag{5.15}$$

4) $\underline{f(x) = \ln(1+x)}$, $f: (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$

Prin inducție obținem

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

deci,

$$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)! \tag{5.16}$$

şi avem seria de puteri

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} \tag{5.17}$$

Cu raza de convergență

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{1}{k}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)}{k} = 1$$

Restul de ordinul n al formulei lui Taylor este

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}$$

$|R_n(x)| \le \frac{1}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \to 0$ pentru $x \in (-1,1)$.

Atfel, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x) = \ln(1+x)$ este:

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k!},\ R = 1} \tag{5.18}$$

5) $\underline{f(x) = (1+x)^{\alpha}}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$

Pentru derivata de un ordin k oarecare obținem:

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1) \tag{5.19}$$

Seria de puteri pe care o putem construi este

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k \tag{5.20}$$

Raza de convergență este

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}\right|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{|\alpha-k|}=1$$

iar restul de ordinul n al formulei lui Taylor are forma

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}$$

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\right|\to 0 \text{ pt } x\in(-1,1).$$

Prin urmare, dezvoltarea în serie Taylor a funcției $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ este:

$$\boxed{(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!}x^k,\ R=1} \tag{5.21}$$

Aceasta este cunoscută sub denumirea de seria binomială.

7.6. Serii trigonometrice

Să considerăm şirul de funcții $(f_k)_{k\in N}$ cu $f_k:\mathbb{R}\to[-1,1]$ definite astfel:

$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\quad f_2(x)=\cos x$; $\quad f_3(x)=\sin x$; $\quad f_4(x)=\cos 2x$;

$f_5(x)=\sin 2x$;...; $f_{2k}(x)=\cos kx$; $f_{2k+1}(x)=\sin kx$;...

Acest şir se numeşte şir trigonometric şi are proprietatea:

$$\langle f_i(x),f_j(x)\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f_i(x)f_j(x)dx=\begin{cases}0 & \text{pentru } i\neq j\\ \pi & \text{pentru } i=j\end{cases} \tag{6.1}$$

adică, termenii şirului sunt funcții ortogonale pe intervalul $[-\pi,\pi]$.

<u>Definiție</u>:

Orice combinație liniară cu coeficienți reali a unui număr finit de termeni ai şirului trigonometric se numeşte <u>polinom trigonometric</u>.

<u>De exemplu</u>:

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{6.2}$$

unde $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ şi $|a_k| + |b_k| > 0$, este un <u>polinom trigonometric de gradul n</u>.

<u>Definiție</u>

O serie de forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{6.3}$$

se numeşte <u>serie trigonometrică</u>.

<u>Propoziția 1</u>

Dacă seria $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{u} f$ atunci coeficienții a_k, b_k au următoarele expresii

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \quad , \quad k = 0,1,2,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx \quad , \quad k = 1,2,\ldots \end{aligned} \tag{6.4}$$

<u>Demonstrație</u>:

Din convergența uniformă a seriei trigonometrice pe intervalul $[-\pi, \pi]$, conform definiției, rezultă că şirul sumelor parțiale, $(s_n)_{n\in N} \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{u} f$ unde

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{6.5}$$

Prin urmare putem spune că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in [-\pi, \pi]$ avem:

$$|s_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{6.6}$$

Fie şirul de funcţii $(s_n(x)\cos px)_{n\in N}$ şi calculăm

$|s_n(x)\cos px - f(x)\cos px| = |\cos px|\cdot|s_n(x)-f(x)| \le$

$\le |s_n(x)-f(x)| < \varepsilon \quad (\forall)\ n > N(\varepsilon)$ şi $(\forall)\ x\in[-\pi,\pi]$

Deducem că şirul

$(s_n(x)\cos px)_{n\in N} \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{u} f(x)\cos px$

Cum termenii acestui şir sunt funcţii continue, deci integrabile pe $[-\pi,\pi]$, putem scrie

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[\lim_{n\to\infty} s_n(x)\cos px\right]dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)\cos px dx$$

adică

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)\right]\cos px dx =$$

$$= a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 px dx = \pi a_p$$

din cauza ortogonalităţii şirului trigonometric pe intervalul $[-\pi,\pi]$.

De aici deducem:

$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos px dx,\ p = 0,1,2,...$$

Analog, din convergenţa uniformă pe $[-\pi,\pi]$ a şirului $(s_n(x)\sin px)_{n\in N}$, deducem:

$$b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin px dx,\ p = 1,2,...$$

<u>Observaţie</u>:--

Propoziţia demonstrată ne sugerează să asociem unei funcţii f integrabile pe $[-\pi,\pi]$ numerele $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ definite de relaţiile (6.4), deci şi seria trigonometrică

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)}$$

pe care o mai numim <u>serie Fourier ataşată funcţiei f.</u> Numerele a_k, b_k astfel definite se numesc <u>coeficienţii Fourier ai funcţiei f</u>.

Obiectivul principal al teoriei care urmează constă în a stabili condiţii asupra funcţiei f care asigură că seria Fourier cerespunzătoare este convergentă şi a evidenţia legătura dintre suma seriei şi funcţia f căreia i se asociază.

<u>Propoziţie 2</u>

Dacă seria $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{u} f$ atunci are loc <u>egalitatea lui Parseval</u>

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (6.7)$$

<u>Demonstraţie</u>:

Din convergenţa uniformă către f pe intervalul $[-\pi,\pi]$ a şirului sumelor parţiale corespunzătoare seriei trigonometrice, $(s_n)_{n\in N}$, se deduce că şirul $(s_n f)_{n\in N} \xrightarrow[{[-\pi,\pi]}]{u} f^2$

Folosind din nou teorema de integrare termen cu termen a şirurilor de funcţii, avem:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} s_n(x) f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Dar

$$\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] f(x)dx =$$

$$= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

conform formulelor (6.4).

Rezultă că:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right] = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Propoziție 3

Dacă seria numerică $\sum_{k=1}^{\infty}\left(|a_k| + |b_k|\right)$ este convergentă, atunci seria trigonometrică $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație: rezultă imediat apelând la criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă pentru seriile de funcții cu observația că:

$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \le |a_k| + |b_k|$

pentru $(\forall)\ k \in N$ şi $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Exemplu: --

Fie $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

Coeficienții Fourier ai acestei funcții continue sunt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{4}{k^2}\cos k\pi = (-1)^k \cdot \frac{4}{k^2}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx = 0$$

Seria Fourier asociată funcției f este:

$$f(x) \approx \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2} \qquad (6.8)$$

Deoarece $\left|(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}\right| \le \frac{1}{k^2}$ $(\forall)\ k \ge 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ iar seria $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ este convergentă, deducem că seria (6.8) este absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

În cele trei propoziții demonstrate, singura proprietate impusă funcției f a fost cea de integrabilitate. Cum o funcție continuă pe un interval $[a,b]$ este integrabilă pe $[a,b]$, dar şi o funcție continuă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță este integrabilă pe $[a,b]$, în cele ce urmează vom considera această clasă mai generală de funcții.

Reamintim că punctul $x_0 \in [a,b]$ este prunct de discontinuitate de prima speță al funcției f, dacă limitele sale laterale în acest punct există, sunt finite, dar diferite. Funcția f care admite pe $[a,b]$ un număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță o numim funcție continuă pe porțiuni.

Teorema 1

Dacă $f:[-\pi,\pi]\to \mathbb{R}$ este o funcție continuă sau continuă pe porțiuni pe $[-\pi,\pi]$ iar a_k, b_k sunt coeficienții Fourier ataşați acesteia, atunci:

a) Seria $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)$ este convergentă

b) Are loc inegalitatea lui Bessel

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \tag{6.9}$$

Demonstrație:

Folosim inegalitatea evidentă

$$\left[f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]^2\ge 0$$

şi integrăm pe $[-\pi,\pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\frac{a_0^2}{4}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)^2\right]^2dx--a_0\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx-$$

$$-2\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right]dx+a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)dx\ge 0$$

Dacă ținem seama de ortogonalitatea pe $[-\pi, \pi]$ a şirului trigonometric precum şi de (6.4) obținem:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \qquad (6.10)$$

Deoarece această inegalitate este valabilă pentru orice $n \in N$, ea se păstrează şi prin trecere la limită. Astfel obținem inegalitatea (6.9).

Din (6.10) putem reține că şirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\in N}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)$ este mărginit; rezultă că el este convergent, prin urmare seria $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$ este convergentă.

<u>Consecință</u>:
Dacă $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă sau continuă pe porțiuni, atunci coeficienții Fourier a_k, b_k ataşați lui f au proprietatea:

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} a_k = 0} \text{ şi } \boxed{\lim_{k\to\infty} b_k = 0} \qquad (6.11)$$

Acest rezultat se obține folosind condiția necesară de convergență a unei serii numerice, adică $a_k^2 + b_k^2 \to 0$ pentru $k \to \infty$.

<u>Exemple:</u> --

1) Seria trigonometrică $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\cos kx + \sin kx)$ nu poate fi serie Fourier a unei funcții $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ continue sau continue pe porțiuni deoarece în cazul de față $a_k = b_k = 1$ şi nu avem $a_k \to 0$ şi $b_k \to 0$ pentru $k \to \infty$.

2) Seria trigonometrică $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\frac{\cos kx}{\sqrt{k}} + \frac{\sin kx}{\sqrt{k}})$ nu poate fi nici ea seria Fourier a unei funcții continue sau continue pe porțiuni pe $[-\pi,\pi]$ deoarece aici $a_k = b_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$, dar seria $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ este divergentă.

<u>Definiție:</u>

Spunem că funcția $f:[-\pi,\pi]$ este <u>derivabilă pe porțiuni</u> pe $[-\pi,\pi]$, dacă există o diviziune a acestuia pe ale cărui intervale deschise f este derivabilă, iar în punctele de diviziune, f are derivate laterale finite.

<u>Teorema 2</u>

Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este o funcție derivabilă pe porțiuni pe $[-\pi,\pi]$ şi îndeplineşte condiția $f(-\pi)=f(\pi)$, atunci seria Fourier asociată este convergentă în orice $x\in[-\pi,\pi]$ şi avem:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} \tag{6.12}$$

<u>Corolar</u>

Dacă $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ este continuă pe acest interval, derivabilă pe porțiuni şi $f(-\pi)=f(\pi)$, atunci seria Fourier asociată este uniform convergentă pe $[-\pi,\pi]$ şi avem:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=f(x) \tag{6.13}$$

<u>Observații</u>:---

1) Ipoteza $f(-\pi)=f(\pi)$ nu reprezintă o restricție esențială. Dacă $f(-\pi)\neq f(\pi)$, funcția

$$g(x)=f(x)+\frac{1}{2\pi}[f(-\pi)-f(\pi)]x,\ x\in[-\pi,\pi] \tag{6.14}$$

are proprietatea $g(-\pi)=g(\pi)=\dfrac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}$ şi deci este suficient să se utilizeze g în locul funcției f. Funcția g este derivabilă pe porțiuni la fel ca f.

2) Deşi inițial funcția f este definită pe intervalul $[-\pi,\pi]$, deoarece seria Fourier ataşată funcției f este o serie de funcții periodice, de perioadă

2π, rezultă că această serie va defini pe $\mathbb{R}$ prelungirea funcției f prin periodicitate, cu perioada 2π.

De aceea, în teoria seriilor trigonometrice, deşi se pleacă inițial cu funcții $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, f va fi considerată ca fiind periodică cu perioada 2π, definită pe $\mathbb{R}$. Notând cu $\tilde{f}$ această prelungire, avem $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu:

$$\begin{aligned}&\tilde{f}(x)=f(x) \quad \text{pentru} \quad x\in[-\pi,\pi]\\ &\tilde{f}(x+2\pi)=f(x)\end{aligned} \tag{6.15}$$

3) Dacă f este o funcție definită pe un interval oarecare $[-\alpha,\alpha]\subset\mathbb{R}$, integrabilă, atunci se consideră funcția $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$g(y)=f\left(\frac{\alpha y}{\pi}\right) \tag{6.16}$$

Cum acestei funcții, pe intervalul $[-\pi,\pi]$, i se ataşează seria Fourier

$$g(y)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos ky+b_k\sin ky) \tag{6.17}$$

rezultă că seria Fourier ataşată Funcției f pe interrvalul $[-\alpha,\alpha]$ este:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{\alpha}+b_k\sin\frac{k\pi x}{\alpha}\right) \tag{6.18}$$

unde

$$\begin{cases}a_k=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\alpha}dx, \quad k=0,1,2,...\\ b_k=\dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\alpha}dx, \quad k=1,2,...\end{cases} \tag{6.19}$$

Exemple: --

1) Funcția $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi+x}{2} & , \quad x\in[-\pi,0)\\ \dfrac{\pi}{2} & , \quad x=0\\ \dfrac{\pi-x}{2} & , \quad x\in(0,\pi]\end{cases}$$

are punctul $x = 0$ punct de discontinuitate de prima speță. Pe porțiuni, ea este continuă şi derivabilă. De asemenea, $f(-\pi) = f(\pi) = 0$.

Acestei funcții îi ataşăm seria Fourier

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Observăm că:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0 \\ a_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{-\pi} f(x) \cos kx dx = 0; \quad k = 1,2,... \end{cases}$$

deoarece f este funție impară pe $[-\pi, \pi]$.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx dx = \frac{1}{k}$$

Prin urmare, seria Fourier ataşată funcției date este:

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{6.20}$$

Conform teoremei precedente, seria (6.20) este convergentă în orice punct $x \in [-\pi, \pi]$ către funcția sumă $S(x)$.

*) Dacă <u>x este punct de continuitate</u> pentru funcția f avem $S(x) = f(x)$, deci putem scrie:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \tag{6.21}$$

**) În punctul de discontinuitate $x = 0$ conform teoremei avem:

$$S(x) = \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} \tag{6.22}$$

relație care este verificată, deoarece $S(0) = 0$ iar $f(0-0) + f(0+0) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$.

2) Funcția $f:[-\alpha,\alpha]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ este continuă şi derivabilă pe acest interval.

Cum f este funcție pară, rezultă:

$b_k=0$, $k=1,2,...$

$$a_k=\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)\cos\frac{k\pi x}{\alpha}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\alpha}x^2\cos\frac{k\pi x}{\alpha}dx=(-1)^k\frac{4\alpha^2}{k^2\pi^2}$$

$$a_0=\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=\frac{2}{\alpha}\int_{0}^{\alpha}x^2dx=\frac{2\alpha^2}{3}$$

Conform corolarului teoremei 2, putem scrie că:

$$x^2=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{\alpha},\ x\in[-\alpha,\alpha] \tag{6.23}$$

Dacă considerăm funcția $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, prelugirea prin periodicitate a funcției f, care este o funcție continuă pe $\mathbb{R}$, obtinem dezvoltarea:

$$\tilde{f}(x)=\frac{\alpha^2}{3}+\frac{4\alpha^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{\alpha},\ x\in\mathbb{R} \tag{6.24}$$

În acest capitol am întâlnit două tipuri importante de serii de funcții, anume seriile de puteri şi seriile trigonometrice şi este utilă o comparație între acestea. Seriile de puteri sunt mai uşor de manevrat (sumele lor parțiale sunt polinoame algebrice), iar în domeniul de convergență, suma lor este 0 funcție indefinit derivabilă. Un neajuns al lor este acela că, în general, o funcție nu poate fi reprezentată printr-o serie de puteri pe întregul ei domeniu de definiție. De exemplu funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$, are dezvoltarea $\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$, care este valabilă numai pentru $|x|<1$.

Seriile trigonometrice au ca sume parțiale polinoamele trigonometrice şi reprezentarea funcțiilor prin serii Fourier are loc pe orice interval, ceea ce este deosebit de util. Totuşi, ele nu pot fi derivate sau integrate termen cu termen fără precauții suplimentare.

7.7. Exerciții rezolvate

1) Să se dezvolte în serie Taylor următoarele funcții indicându-se şi razele de convergență ale seriilor obținute.

a) $f(x) = xe^{-2x}$

Pentru această funcție folosim seria exponențialei şi avem:

$$f(x) = xe^{-2x} = x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\frac{x^{k+1}}{k!}$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\frac{(-2)^k}{k!}\right|}} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{k!}{2^k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)!}{2^{k+1}}\cdot\frac{x^{k+1}}{k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{2} = \infty$$

Deci: $\boxed{xe^{-2x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k\frac{x^{k+1}}{k!}}$, $R = \infty$

b) $f(x) = \text{shx}$

Putem folosi tot seria exponențialei deoarece:

$$f(x) = \text{shx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left[1-(-1)^k\right]\frac{x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!}}} = \infty$$

Deci: $\boxed{\text{shx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$, $R = \infty$.

c) $f(x) = \sin 3x + x\cos 3x$

Pentru această funcție, putem folosi seriile funcțiilor trigonometrice sin şi cos.

$$f(x) = \sin 3x + x\cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(3x)^{2k+1}}{(2k+1)!} + x\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(3x)^{2k}}{(2k)!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k)!}x^{2k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{3}{2k+1}+1\right)x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}(2k+4)}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{3^{2k}(2k+4)}{(2k+1)!}}} = \infty$$

Deci: $\boxed{\sin 3x + x\cos 3x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{3^{2k}(2k+4)}{(2k+1)!}x^{2k+1}}$, $R = \infty$.

d) $f(x) = \dfrac{2x-3}{(x-1)^2}$

Pentru această funcție se poate folosi seria binomială dacă observăm că poate fi pusă dub forma:

$$f(x) = -\frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} = -2(1-x)^{-1} - (1-x)^{-2} =$$

$$= -2\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1(-2)-(-k)}{k!}(-x)^k\right] - \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-2)(-3)-(-k-1)}{k!}(-x)^k\right] =$$

$$= -2 - 2\sum_{k=1}^{\infty}x^k - 1 - \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)x^k = -3 - \sum_{k=1}^{\infty}(k+3)x^k$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k+3}} = 1$$

Deci: $\boxed{\frac{2x-3}{(x-1)^2} = -3 - \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)x^k}$, $R = 1$.

e) $f(x)=\ln(1+x-2x^2)$

Putem folosi seria funcției $\ln(1+x)$, dacă observăm că:

$$f(x)=\ln(1+x-2x^2)=\ln[(1-x)(1+2x)]=\ln(1-x)+\ln(1+2x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(-x)^k}{k}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(2x)^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^k-1}{k}x^k$$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\left|\frac{(-1)^{k-1}\cdot 2^k-1}{k}\right|}}=\frac{1}{4}$$

Deci: $\boxed{\ln(1+x-2x^2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^k-1}{k}x^k}$, $R=\frac{1}{4}$

f) $f(x)=\arcsin x$

Observăm că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-1/2}$ şi putem folosi seria binomială penru f'.

$$f'(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{-2k+1}{2}\right)}{k!}\left(-x^2\right)^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k} \qquad (7.1)$$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+2}{2k+1}=1$$

Deoarece pe orice interval compact inclus în intervalul de convergență $(-1,1)$ seria (7.1) este uniform convergentă, putem folosi teorema de integrare termen cu termen a seriilor şi obținem

$$\begin{aligned}f(x)&=\int\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}\right]dx=x+\sum_{k=1}^{\infty}\int\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}dx=\\&=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{x^{2k+1}}{2k+1}+C\end{aligned} \qquad (7.2)$$

Constanta de integrare C se poate determina dând o valoare particulară lui x în relația (7.2). Se vede că pentru $x=0$ se obține $C=0$.

Deci: $\boxed{\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$, $R = 1$.

g) $\underline{f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})}$

Derivata acestei funcții este:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-1/2} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2k+1}{2}\right)}{k!}\left(x^2\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k}, \qquad R = 1$$

Prin integrare avem:

$$f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C$$

Pentru $x = 0$ obținem $C = 0$ şi rezultatul este:

$\boxed{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}$, $R = 1$.

h) $\underline{f(x) = x\,\mathrm{arctg}x - \ln\sqrt{1+x^2}}$

Observăm că:

$$f'(x) = \mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x$$

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Prin urmare, putem folosi seria binomială pentru f''.

$$f''(x) = \left(1+x^2\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{k!} x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, \qquad R = 1$$

Pentru $x \in (-1,1)$ folosim teorema de integrare termen cu termen a seriilor şi avem:

$$f'(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + C$$

unde pentru $x=0$ obținem $C=0$.

$$f'(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\ R=1$$

Integrând din nou, avem:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}+C$$

unde pentru $x=0$ obținem $C=0$. În felul acesta, rezultatul este:

$$\boxed{x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}=\frac{x^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+2}}{(2k+1)(2k+2)}},\ R=1$$

2) Să se determine raza de convergență şi suma următoarelor serii de puteri:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+1}{2^k\cdot k!}x^k$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{k^2+1}{2^k\cdot k!}}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\frac{2^k\cdot k!}{k^2+1}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}2(k+1)=\infty$$

Suma acestei serii se poate calcula uşor, folosind seria exponențialei, dacă o punem sub o formă convenabilă:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+1}{2^k\cdot k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{2^k\cdot k!}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k+1)+k}{2^k\cdot k!}+e^{\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{x^2}{4}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-2}+\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k-1}+e^{\frac{x}{2}}=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)$$

deci avem:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2+1}{2^k\cdot k!}x^k=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1\right)},\ R=\infty$$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(k+1)}$

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{\dfrac{1}{k(k+1)}}}=\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{k(k+1)}=1$$

Cum $\frac{x^k}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)x^k$, seria data se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} \tag{7.3}$$

Fie $S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ cu $|x| < 1$

$$S_1'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$$

fiind seria geometrică cu rația $x \in (-1,1)$. Prin integrare avem:

$$S_1(x) = -\ln|1-x| + C$$

Pentru $x = 0$ obținem $C = 0$ şi avem:

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \tag{7.4}$$

Fie

$$S_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{1}{x}\left[-\ln(1-x) - x\right] \tag{7.5}$$

Obținem:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)} = \frac{1-x}{x}\ln(1-x) + 1}, \ R = 1$$

c) $\underline{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k+2}}{2k(2k+1)(2k+2)}}$

$$R = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{2k(2k+1)(2k+2)} = 1$$

Notăm: $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k+2}}{2k(2k+1)(2k+2)}$, $|x| < 1$

Prin derivare, obținem:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k(2k+1)}$$

$$S''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k}}{2k}$$

$$S'''(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k-1} = x - x^3 + x^5 + ... = \frac{x}{1+x^2}$$

Prin integrare, obținem:

$$S''(x) = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

iar pentru $x = 0$ rezultă $C = 0$, deci:

$$S''(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$$

$$S'(x) = \int \ln\sqrt{1+x^2} dx = x \ln\sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{arctg} x + C_1$$

Şi în acest caz, pentru $x = 0$ rezultă $C_1 = 0$, deci:

$$S'(x) = x \ln\sqrt{1+x^2} - x + \operatorname{arctg} x$$

Printr-o nouă integrare se obține:

$$S(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\sqrt{1+x^2} - \frac{3x^3}{4} + x \operatorname{arctg} x + C_2$$

La fel, $C_2 = 0$ pentru $x = 0$ şi rezultatul final este:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k+2}}{2k(2k+1)(2k+2)} = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\sqrt{1+x^2} - \frac{3x^3}{4} + x \operatorname{arctg} x}, \ R = 1.$$

Mai putem face observația că pentru $x = 1$ obținem seria numerică alternată

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)} ... \tag{7.6}$$

Aceasta fiind convergentă, suma ei o putem determina folosind proprietatea de continuitate a sumei unei serii de puteri în punctele sale de convergență, adică:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k(2k+1)(2k+2)} = \lim_{x \to 1} \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \ln\sqrt{1+x^2} - \frac{3x^3}{4} + x \operatorname{arctg} x \right] = \frac{1}{4}(\pi - 3)$$

3) Să se dezvolte în serie trigonometrică funcțiile:

a) $f(x)=|x|$, $f:[-\pi,\pi]$

Se observă cu uşurință că această funcție este continuă pe $[-\pi,\pi]$ şi nu este derivabilă în $x=0$, deci este derivabilă pe porțiuni pe acest interval. De asemenea este funcție pară şi $f(-\pi)=f(\pi)=\pi$.

Coeficienții Fourier ataşați acestei funcții sunt:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\pi$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=\frac{2}{\pi k^2}[\cos kx-1]=$$

$$=\begin{cases}0 & \text{daca} \quad k=2n\\ -\dfrac{4}{\pi(2n+1)^2} & \text{daca} \quad k=2n+1\end{cases}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx=0$$

Prin urmare, seria Fourier ataşată funcției date este:

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$$

aceasta fiind absolut şi uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Cum funcția f este continuă pe $[-\pi,\pi]$, putem reține că:

$$\boxed{|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x}$$

pentru $x\in[-\pi,\pi]$.

b) $f(x)=|\sin x|$, $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$

Această funcție este continuă pe $[-\pi,\pi]$ şi derivabilă pe porțiuni deoarece nu este derivabilă în $x=0$. Este funcție pară şi $f(\pi)=f(-\pi)=0$ coeficienții Fourier sunt

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos kx dx = \frac{2}{\pi}\frac{1+\cos kx}{1-k^2} = \begin{cases} 0 \quad \text{daca} \quad k = 2n+1 \\ \dfrac{4}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{daca} \quad k = 2n \end{cases}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0$$

Prin urmare, dezvoltarea în serie trigonometrică pe intervalul $[-\pi, \pi]$ a funcției $f(x) = |\sin x|$ este:

$$\boxed{|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}\cos(2nx)}$$

CAPITOLUL VIII

INTEGRALE MULTIPLE

8.1. Integrala dublă pe dreptunghi

Începem prin a ne reaminti construcția integralei Riemann pentru funcții de o singură variabilă.

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ şi să cunsiderăm o diviziune Δ a acestui interval determinată de punctele $x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b) \tag{1.1}$$

Prin norma acestei diviziuni, notată $\|\Delta\|$, înțelegem:

$$\|\Delta\| = \max_{k=\overline{1,n}}(x_k - x_{k-1}) \tag{1.2}$$

Fie şi sistemul de puncte $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ astfel încât $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ pentru $k = \overline{1,n}$.

Definiție:

Prin sumă Riemann asociată funcției f, diviziunii Δ şi punctelor $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ intermediare, notată $\sigma_\Delta(f,\xi_k)$, înțelegem numărul real:

$$\sigma_\Delta(f,\xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \tag{1.3}$$

Dacă funcția f este pozitivă, putem face observația că suma (1.3) reprezintă suma ariilor dreptunghiurilor de bază $(x_k - x_{k-1})$ şi înălțime $f(\xi_k)$. Rezultă că suma Rieman (1.3) aproximează aria mulțimii din plan, denumită subgraficul lui f, delimitată de axa OX, graficul lui f şi dreptele $x = a$ şi $x = b$.

<u>Definiție</u>:

Funcția <u>f</u> <u>se</u> <u>numeşte</u> <u>integrabilă</u> <u>pe</u> <u>$[a,b]$</u> dacă există un număr I cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere a punctelor $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, să aibă loc inegalitatea:

$$|\sigma_\Delta(f,\xi_k) - I| < \varepsilon \tag{1.4}$$

Dacă acest număr I există, el este unic şi se numeşte integrala funcției f pe intervalul $[a,b]$.

Se notează:

$$I = \int_a^b f(x)dx \tag{1.5}$$

Prin analogie, putem introduce noțiunea de integrabilitate pentru funcții de două variabile. Dacă pe dreapta reală, orice domeniu este un interval, în plan, ca şi în spațiu există domenii care nu mai sunt intervale, ele având o structură mult mai deosebită de aceea a unui interval. De aceea, ne vom referi numai la domeniile din $\mathbb{R}^2$ care au arie.

Pentru început, fie intervalul bidimensional pe care îl numim dreptunghi, definit de:

$$A_2 = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

Pentru intervalele $[a,b]$ şi $[c,d]$ considerăm diviziunile Δ_1 şi Δ_2,

$\Delta_1 = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$

$\Delta_2 = (c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d)$

Cu ajutorul dreptunghiurilor

$A_{jk} = [x_{j-1}, x_j]x[y_{k-1}, y_k]$ cu $j = \overline{1,n}$ şi $k = \overline{1,m}$ putem spune că am determinat o diviziune Δ a dreptunghiului A_2.

$$\Delta = (A_{jk};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m}) \tag{1.7}$$

Vom numi norma diviziunii Δ, notată $\|\Delta\|$, cel mai mare dintre diametrele dreptunghiurilor A_{jk} (diametrul unei mulțimi $E \subset \mathbb{R}^2$ este diametrul celui mai mic cerc care acoperă mulțimea E). Evident, în cazul dreptunghiului A_{jk}, diametrul său coincide cu lungimea diagonalei.

$$\text{diam } A_{jk} = \sqrt{\left(x_j - x_{j-1}\right)^2 + \left(y_k - y_{k-1}\right)^2} \tag{1.8}$$

Prin urmare, putem scrie

$$\|\Delta\| = \max_{\substack{j=\overline{1,n} \\ k=\overline{1,m}}} \text{diam } A_{jk} \tag{1.9}$$

În fiecare dreptunghi A_{jk} alegem un punct

$\left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right) \in A_{jk}$ $\quad j = \overline{1,n}$ şi $k = \overline{1,m}$

Pentru o funcție $f : A_2 \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, <u>formăm suma Riemann</u>

$$\boxed{\sigma_\Delta\left(f, \left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f\left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)\left(x_j - x_{j-1}\right)\left(y_k - y_{k-1}\right)} \tag{1.10}$$

Se poate observa că (1.11) reprezintă suma volumelor paralelipipedelor care au ca bază dreptunghiurile A_{jk} şi înălțimile date de $f\left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)$.

<u>Definiție</u>:

Funcția <u>f</u> <u>se</u> <u>numeşte</u> <u>integrabilă</u> <u>pe</u> <u>A_2</u> dacă există un număr I cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a dreptunghiului A_2 cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere a punctelor $\left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right) \in A_{jk}$ să aibă loc inegalitatea:

$$\left|\sigma_\Delta\left(f, \left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)\right) - I\right| < \varepsilon$$

Se observă că definiția este analogă cu cea dată integrabilității funcțiilor de o singură variabilă şi exprimă faptul că numărul I poate fi aproximat oricât de precis cu suma Riemann corespunzătoare unor diviziuni de normă suficient de mică.

Astfel putem spune că f este integrabilă pe A_2 dacă pentru orice şir de diviziuni $\left(\Delta_n\right)_{n \in N}$, a dreptunghiului (A_2) cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, există şi este finită limita şirului sumelor Riemann,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(f, \left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right)\right) = I$$

oricare ar fi alegerea punctelor $\left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right) \in A_{jk}^n$

Dacă f este integrabilă pe A_2, numărul I se numeşte <u>integrala</u> <u>funcției</u> <u>f</u> <u>pe</u> <u>A_2</u> (integrala dublă pe A_2) şi se notează:

$$\boxed{I = \iint_{A_2} f(x,y)\,dxdy} \tag{1.11}$$

sau mai simplu, $I = \int_{A_2} f$.

În continuare, vom folosi următoarele notații:

1) $\mathcal{R}(A_2)$, mulțimea funcțiilor integrabile pe A_2.

2) $\mathcal{D}(A_2)$, mulțimea tuturor diviziunilor Δ corespunătoare dreptunghiului A_2.

Fie funcția $f : A^2 \to \mathbb{R}$, mărginită pe A_2.

Rezultă că f este mărginită pe dreptunghiurile A_{jk} şi vom nota:

$$m_{jk} = \inf_{(x,y)\in A_{jk}} f(x,y) \text{ şi } M_{jk} = \sup_{(x,y)\in A_{jk}} f(x,y) \tag{1.12}$$

Pentru o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ putem forma <u>sumele Darboux</u>

$$\begin{aligned} s_\Delta(f) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \\ S_\Delta(f) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

numite <u>suma</u> <u>Darboux</u> <u>inferioară</u>, respectiv <u>suma</u> <u>Darboux</u> <u>superiară</u>.

Între sumele Darboux (1.13) şi suma Riemann (1.10), pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$, putem scrie relația:

$$s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta(f,(\xi_{jk},\eta_{jk})) \le S_\Delta(f) \tag{1.14}$$

<u>Teorema 1</u>:

Criteriul Darboux de integrabilitate

$f : A_2 \to \mathbb{R}$, f mărginită pe A_2.

Funcția $f \in \mathcal{R}(A_2)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu proprietatea $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, are loc inegalitatea:

$$|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)| < \varepsilon \tag{1.15}$$

Demonstrație:

"$\Rightarrow$" Din $f \in \mathcal{R}(A_2) \overset{(def)}{\Rightarrow} (\exists)\ I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)$ δ_ε astfel încât pentru $(\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ să avem $\left|\sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) - I\right| < \varepsilon$ oricare ar fi alegerea punctelor $\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right) \in A_{jk}$.

Deoarece:

$$\begin{cases} I - \varepsilon < \sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) < I + \varepsilon \\ s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) \le S_\Delta(f) \end{cases} \tag{1.16}$$

putem alege δ_ε astfel încât pentru $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ să avem:

$I - \varepsilon < s_\Delta(f) < S_\Delta(f) < I + \varepsilon$

de unde $\left|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)\right| < \varepsilon$

"$\Leftarrow$" Având în vedere (1.14), putem afirma că mulțimea $\left(s_\Delta(f)\right)_{\Delta \in \mathcal{D}(A_2)}$ este mărginită superior, iar mulțimea $\left(S_\Delta(f)\right)_{\Delta \in \mathcal{D}(A_2)}$ este mărginită inferior şi notăm:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sup_{\Delta \in \mathcal{D}(A_2)} s_\Delta(f) \\ I_2 &= \inf_{\Delta \in \mathcal{D}(A_2)} S_\Delta(f) \end{aligned} \tag{1.17}$$

Evident, putem scrie:

$s_\Delta(f) \le I_1 \le I_2 \le S_\Delta(f)\quad (\forall)\ \ \Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ şi cum $\left|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)\right| < \varepsilon$, $(\forall)$ $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, deducem că $\left|I_1 - I_2\right| < \varepsilon \ \Rightarrow\ I_1 = I_2 = I$

Din relațiile

$$\begin{cases} s_\Delta(f) \le I \le S_\Delta(f) \\ s_\Delta(f) \le \sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) \le S_\Delta(f) \\ \left|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)\right| < \varepsilon\ (\forall)\ \Delta \in \mathcal{D}(A_2),\ \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \end{cases}$$

deducem

$\left|\sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) - I\right| \le \left|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)\right| < \varepsilon$

pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, deci $f \in \mathcal{R}(A_2)$

> <u>Teorema 2</u>:
> Dacă funcția f este continuă pe A_2 atunci ea este integrabilă pe A_2.

<u>Demonstrație</u>:

Din $f \in C^0(A_2)$ iar A_2 compact $\Rightarrow$ f mărginită pe A_2, deci şi pe dreptunghiutile A_{jk} şi îşi atinge marginile. Înseamnă că există punctele (x'_{jk}, y'_{jk}) şi $(x''_{jk}, y''_{jk}) \in A_{jk}$ astfel încât:

$$\begin{aligned} m_{jk} &= \inf_{(x,y)\in A_{jk}} f(x,y) = f(x'_{jk}, y'_{jk}) \\ M_{jk} &= \sup_{(x,y)\in A_{jk}} f(x,y) = f(x''_{jk}, y''_{jk}) \end{aligned} \tag{1.18}$$

Pe de altă parte, din $f \in C^0(A_2)$ iar A_2 compact rezultă că f este uniform continuă pe A_2, deci şi pe $A_{jk} \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice (ξ'_{jk}, η'_{jk}) şi $(\xi''_{jk}, \eta''_{jk}) \in A_{jk}$ cu $\left\|(\xi'_{jk}, \eta'_{jk}) - (\xi''_{jk}, \eta''_{jk})\right\| < \delta_\varepsilon$ să avem

$$\left|f(\xi'_{jk}, \eta'_{jk}) - f(\xi'_{jk}, \eta'_{jk})\right| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } A_2} \tag{1.19}$$

Fie diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi calculăm:

$$|S_\Delta(f) - s_\Delta(f)| = \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} M_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) -\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} m_{jk}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})\right| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} |M_{jk} - m_{jk}|(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \left|f(x''_{jk}, y''_{jk}) - f(x'_{jk}, y'_{jk})\right|(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\text{aria } A_2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{\text{aria } A_2}\cdot \text{aria } A_2 = \varepsilon$$

Conform criteriului lui Darboux, rezultă $f \in \mathcal{R}(A_2)$

Teorema 3:

Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$, $A_2 = [a,b] \times [c,d]$

Dacă: a) $f \in C^0(A_2)$

b) pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala simplă

$$\int_c^d f(x,y)dy$$

Atunci:a) există integrala iterată $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$;

b) $$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx \qquad (1.20)$$

(1.20) este formula de descompunere a integralei duble în două integrale simple.

Pentru simplitate, integrala iterată se mai notează $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$.

Demonstrație:

Fie funcția $\Phi(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ şi arătăm că este integrabilă pe $[a,b]$.

Considerăm diviziunile:

$\Delta_1 = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$

$\Delta_2 = (c = y_0 < y_1 < ... < y_m = d)$

$\Delta = (A_{jk};\ j = \overline{1,n};\ k = \overline{1,m})$

precum şi punctele intermediare $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ cu $j = \overline{1,n}$

Pentru funcția $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ considerăm suma Riemann:

$$\sigma_{\Delta_1}(\Phi, \xi_j) = \sum_{j=1}^{n} \Phi(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} \left[\int_c^d f(\xi_j, y)dy \right] (x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{m} \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y)dy \right] (x_j - x_{j-1})$$

Deoarece f este funcție continuă pe $[c,d]$, deci pe fiecare interval $[y_{k-1}, y_k]$, putem folosi teorema de medie pentru integrala simplă.

Prin urmare, există puncte $\eta_k \in [y_{k-1}, y_k]$ cu $k = \overline{1,m}$ astfel încât să avem:

$$\sigma_{\Delta_1}(\Phi, \xi_j) = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m} f(\xi_j, \eta_k)(y_k - y_{k-1})\right](x_j - x_{j-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_j, \eta_k)(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})$$

Prin urmare obținem:

$$\sigma_{\Delta_1}(\Phi, \xi_j) = \sigma_{\Delta}(f, (\xi_j, \eta_k)) \tag{1.21}$$

relație care este valabilă pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$. Este evident faptul că pentru $\|\Delta\| \to 0$ avem şi $\|\Delta_1\| \to 0$.

Astfel, deoarece $f \in \mathcal{R}(A_2)$, prin trecere la limită în (1.21) rezultă $\Phi \in \mathcal{R}([a,b])$ şi avem egalitatea:

$$\int_a^b \Phi(x)dx = \iint_{A_2} f(x,y)dy \text{ adică}$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx = \iint_{A_2} f(x,y)dxdy$$

<u>Observații</u>:---

1) Teorema de descompunere a integralei duble poate avea şi următoarea formulare

Dacă: a) $f \in C^0(A_2)$

b) pentru orice $y \in [c,d]$ există $\int_a^b f(x,y)dx$

Atunci: a) există $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$;

b) $\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy$

2) Teorema de descompunere rămâne valabilă şi pentru funcţii numai integrabile pe A_2.

<u>Exemplu:</u> ---

Fie $A_2 : [0,1]\times[1,2]$ şi $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$

Funcția f este continuă pe A_2 şi pentru orice $x\in[0,1]$ f este continuă, deci integrabilă pe $[1,2]$.

Putem scrie:

$$\iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{A_2}\frac{dxdy}{x+y}=\int_0^1 dx\int_1^2\frac{dy}{x+y}=\int_0^1[\ln(x+2)-\ln(x+1)]dx=$$

$$=[(x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)]\Big|_0^1=3\ln 3-4\ln 2$$

<u>8.2. Proprietăți ale funcțiilor integrabile pe dreptunghi</u>

1) Fie $f,g : A_2\to\mathbb{R}$

> Dacă funcțiile f şi g sunt integrabile pe A_2, atunci funcția $\alpha f+\beta g$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{R})$ este integrabilă pe A_2 şi avem
>
> $$\iint\limits_{A_2}(\alpha f+\beta g)(x,y)dxdy=\alpha\iint\limits_{A_2}f(x,y)dxdy+\beta\iint\limits_{A_2}g(x,y)dxdy \qquad (2.1)$$
>
> (2.1) exprimă <u>proprietatea de liniaritate a integralei duble</u>.

Din f şi $g\in\mathcal{R}(A_2)$, conform definiției, pentru orice şir $(\Delta_n)_{n\in N}$ cu

$\Delta_n\in\mathcal{D}(A_2)$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$ avem:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(f,\left(\xi_{jk}^n,\eta_{jk}^n\right)\right)=\iint\limits_{A_2}f(x,y)dxdy$$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}\left(g,\left(\xi_{jk}^n,\eta_{jk}^n\right)\right)=\iint\limits_{A_2}g(x,y)dxdy$$

Formăm suma Riemann pentru funcția $\alpha f + \beta g$

$$\sigma_{\Delta_n}\left(\alpha f + \beta g, \left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(\alpha f + \beta g)\left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right)\left(x_j^n - x_{j-1}^n\right)\left(y_k^n - y_{k-1}^n\right) =$$

$$= \alpha\sigma_{\Delta_n}\left(f, \left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right)\right) + \beta\sigma_{\Delta_n}\left(g, \left(\xi_{jk}^n, \eta_{jk}^n\right)\right)$$

Prin trecere la limită obținem:

$$\iint_{A_2}(\alpha f + \beta g)(x,y)dxdy = \alpha\iint_{A_2} f(x,y)dxdy + \beta\iint_{A_2} g(x,y)dxdy$$

2) Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$

> Dacă funcția f este integrabilă pe A_2 şi $f(x,y) \geq 0$ pe A_2, atunci
> $$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy \geq 0 \qquad (2.2)$$

<u>Demonstrație</u>:
Presupunem că

$$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy < 0 \qquad (2.3)$$

Din $f \in \mathcal{R}(A_2) \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(A_2)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice alegere a punctelor $(\xi_{jk}, \eta_{jk}) \in A_{jk}$ avem:

$$\left|\sigma_\Delta\left(f, \left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)\right) - \iint_{A_2} f(x,y)dxdy\right| < \varepsilon \qquad (2.4)$$

În particular, dacă alegem:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left|\iint_{A_2} f(x,y)dxdy\right| \qquad (2.5)$$

Condiția (2.4) ne permite să scriem

$$\sigma_\Delta\left(f, \left(\xi_{jk}, \eta_{jk}\right)\right) < \iint_{A_2} f(x,y)dxdy + \frac{1}{2}\left|\iint_{A_2} f(x,y)dxdy\right| =$$

$$= \iint_{A_2} f(x,y)dxdy - \frac{1}{2}\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = \frac{1}{2}\iint_{A_2} f(x,y)dxdy < 0$$

Am ajuns la o contradicție, deoarece funcția f fiind pozitiv definită pe A_2, suma Riemann $\sigma_\Delta\left(f,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) \geq 0$.

<u>Consecință</u>:

Dacă a) $f,g \in \mathcal{R}(A_2)$

b) $f(x,y) \leq g(x,y)$ pe A_2

Atunci:

$$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy \leq \iint_{A_2} g(x,y)dxdy \tag{2.6}$$

3) Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$, m şi $M \in \mathbb{R}$

Dacă funcția f este integrabilă pe A_2 şi dacă $m \leq f(x,y) \leq M$ pentru orice $(x,y) \in A_2$, atunci

$$m \cdot \text{aria}A_2 \leq \iint_{A_2} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \text{aria}A_2 \tag{2.7}$$

(2.7) reprezintă o <u>formulă de medie</u> pentru integrala dublă

<u>Demonstrație</u>:

Conform consecinței (2.6) avem $m \leq f(x,y) \leq M$ pe A_2. Rezultă

$$m\iint_{A_2} dxdy \leq \iint_{A_2} f(x,y)dxdy \leq M\iint_{A_2} dxdy \tag{2.8}$$

Observăm, că pentru funcția constantă $g(x,y) = 1$, suma Riemann este:

$$\sigma_\Delta\left(g,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left(x_j - x_{j-1}\right)\left(y_k - y_{k-1}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \text{aria}A_{jk} = \text{aria}A_2$$

deci prin trecere la limită

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sigma_\Delta\left(g,\left(\xi_{jk},\eta_{jk}\right)\right) = \iint_{A_2} dxdy = \text{aria}A_2$$

Relația (2.8) devine:

$$m \cdot \text{aria}A_2 \leq \iint_{A_2} f(x,y)dxdy \leq M \cdot \text{aria}A_2$$

4) Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$

> Dacă funcția f este continuă pe A_2, atunci există un punct $(\xi,\eta) \in A_2$ astfel încât
>
> $$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta) \cdot \text{aria} A_2 \tag{2.9}$$
>
> (2.9) este o altă formulă de medie pentru integrala dublă

Demonstrație:

Fie $f \in C^0(A_2)$ iar A_2 compact, rezultă că f este o funcție mărginită pe A_2 şi îşi atinge marginile pe acest dreptunghi. Deci există două puncte (x_1, y_1) şi $(x_2, y_2) \in A_2$ astfel încât:

$$\begin{aligned} m &= \inf_{(x,y)\in A_2} f(x,y) = f(x_1,y_1) \\ M &= \sup_{(x,y)\in A_2} f(x,y) = f(x_2,y_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Putem scrie că

$$m \le f(x,y) \le M \qquad (\forall) \quad (x,y) \in A_2$$

iar conform proprietății precedente avem:

$$m \cdot \text{aria} A_2 \le \iint_{A_2} f(x,y)dxdy \le M \cdot \text{aria} A_2$$

$$m \le \frac{\iint_{A_2} f(x,y)dxdy}{\text{aria} A_2} \le M$$

adică:

$$f(x_1,y_1) \le \frac{\iint_{A_2} f(x,y)dxdy}{\text{aria} A_2} \le f(x_2,y_2) \tag{2.11}$$

Notăm cu:

$$\mu = \frac{\iint_{A_2} f(x,y)dxdy}{\text{aria} A_2} \tag{2.12}$$

şi avem

$$f(x_1,y_1) \le \mu \le f(x_2,y_2) \tag{2.13}$$

Să considerăm funcția compusă $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$

$$h(t)=f(\varphi(t),\psi(t)),\ t\in[\alpha,\beta] \qquad (2.14)$$

unde $\varphi,\psi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$; $\varphi,\psi\in C^0([\alpha,\beta])$, astfel încât

$$\begin{cases}\varphi(\alpha)=x_1;\ \psi(\alpha)=y_1\\ \varphi(\beta)=x_2;\ \psi(\beta)=y_2\end{cases}$$

Evident avem:

$$\begin{cases}h(\alpha)=f(x_1,y_1)\\ h(\beta)=f(x_2,y_2)\end{cases} \qquad (2.15)$$

Deoarece $\varphi,\psi\in C^0([\alpha,\beta])$ iar $f\in C^0(A_2)$, rezultă că funcția $h\in C^0([\alpha,\beta])$, deci ea are proprietatea lui Darboux pe acest interval.

Rezultă că există $t_0\in[\alpha,\beta]$ astfel încât $h(t_0)=\mu$. Prin urmare există $(\xi,\eta)\in A_2$ astfel ca:

$$h(t_0)=f(\varphi(t_0),\psi(t_0))=f(\xi,\eta)=\mu$$

Conform (2.12), exsită $(\xi,\eta)\in A_2$ astfel ca $f(\xi,\eta)=\dfrac{\iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy}{ariaA_2}$, de unde deducem

$$\iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\cdot ariaA_2$$

5) Fie $f,g:A_2\to\mathbb{R}$

> Dacă funcția f este continuă pe A_2 şi funcția g este integrabilă pe A_2, în plus $g(x,y)\geq 0$ pe A_2, atunci există un punct $(\xi,\eta)\in A_2$ astfel că are loc egalitatea
>
> $$\iint\limits_{A_2} f(x,y)g(x,y)dxdy=f(\xi,\eta)\cdot\iint\limits_{A_2} g(x,y)dxdy \qquad (2.16)$$
>
> (2.16) este a treia <u>formulă de medie</u> pentru integrala dublă

Demonstrație:
Folosim continuitatea uniformă pe A_2 a funcției f şi dacă notăm cu m şi M marginile acesteia pe A_2, atunci avem şirul de inegalități
$mg(x,y) \le f(x,y)g(x,y) \le Mg(x,y)$

Obținem:
$$m\iint_{A_2} g(x,y)dxdy \le \iint_{A_2} f(x,y)g(x,y)dxdy \le M\iint_{A_2} g(x,y)dxdy$$

de unde deducem
$$m \le \frac{\iint_{A_2} f(x,y)g(x,y)dxdy}{\iint_{A_2} g(x,y)dxdy} \le M \tag{2.17}$$

În continuare demonstrația este identică celei corespunzătoare proprietății anterioare.

6) Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$

Dacă funcțiile f şi $|f|$ sunt integrabile pe A_2, atunci
$$\left|\iint_{A_2} f(x,y)dxdy\right| \le \iint_{A_2} |f(x,y)|dxdy \tag{2.18}$$

Demonstrație:
Folosim inegalitățile evidente
$$-|f(x,y)| \le f(x,y) \le |f(x,y)| \quad (\forall)\ (x,y) \in A_2$$

Prin urmare, putem scrie:
$$-\iint_{A_2} |f(x,y)|dxdy \le \iint_{A_2} f(x,y)dxdy \le \iint_{A_2} |f(x,y)|dxdy$$

de unde rezultă că
$$\left|\iint_{A_2} f(x,y)dxdy\right| \le \iint_{A_2} |f(x,y)|dxdy$$

7) Fie şirul de funcţii $(f_k)_{k\in N}$ cu $f_k : A_2 \to \mathbb{R}$ şi funcţia $f : A_2 \to \mathbb{R}$

Dacă şirul $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A_2]{u} f$, funcţiile f_k fiind integrabile pe A_2, atunci funcţia limită f este integrabilă pe A_2 şi se poate scrie egalitatea

$$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = \lim_{k\to\infty} \iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy \tag{2.19}$$

<u>Demonstraţie</u>:

*) Arătăm mai întâi că şirul $\left(\iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy\right)_{k\in N}$ este convergent.

Din $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A_2]{u} f$, conform criteriului lui Cauchy, pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)$ un rang N_ε astfel încât pentru $(\forall)\ k > N_\varepsilon$, $(\forall)\ p \geq 1$ şi $(\forall)\ (x,y) \in A_2$ avem:

$$\left|f_{k+p}(x,y) - f_k(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{\text{aria}A_2} \tag{2.20}$$

Calculăm

$$\left|\iint_{A_2} f_{k+p}(x,y)dxdy - \iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy\right| = \left|\iint_{A_2} \left[f_{k+p}(x,y) - f_k(x,y)\right]dxdy\right| \leq$$

$$\leq \iint_{A_2} \left|f_{k+p}(x,y) - f_k(x,y)\right|dxdy < \frac{\varepsilon}{\text{aria}A_2} \iint_{A_2} dxdy = \varepsilon$$

de unde deducem că şirul $\left(\iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy\right)_{k\in N}$ este convergent.

**) Arătăm că şirul $\left(\iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy\right)_{k\in N} \to \iint_{A_2} f(x,y)dxdy$

Fie $I = \lim\limits_{k\to\infty} \iint\limits_{A_2} f_k(x,y)dxdy \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{1\varepsilon}$ astfel încât pentru orice $k > N_{1\varepsilon}$ să avem:

$$\left|\iint\limits_{A_2} f_k(x,y)dxdy - I\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.21}$$

Din $(f_k)_{k\in N} \xrightarrow[A_2]{u} f \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N_{2\varepsilon}$ astfel încât pentru $(\forall)$ $k > N_{2\varepsilon}$, $(\forall)\ (x,y) \in A_2$ avem:

$$|f_k(x,y) - f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{3ariaA_2} \tag{2.22}$$

Fie $p > \max\{N_{1\varepsilon}, N_{2\varepsilon}\}$

Din $f_p \in$ ☼$(A_2) \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru $(\forall)$ $\Delta \in$ 🖓 (A_2) cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi $(\forall)\ (\xi_{jk}, \eta_{jk}) \in A_{jk}$ avem:

$$\left|\sigma_\Delta\left(f_p, (\xi_{jk}, \eta_{jk})\right) - \iint\limits_{A_2} f_p(x,y)dxdy\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.23}$$

Calculăm:

$$\begin{aligned}
&\left|\sigma_\Delta\left(f\ ,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right) - I\right| \le \left|\sigma_\Delta\left(f,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right) - \sigma_\Delta\left(f_p,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right)\right| + \\
&\left| + \sigma_\Delta\left(f_p,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right) - \iint\limits_{A_2} f_p(x,y)dxdy\right| + \left|\iint\limits_{A_2} f_p(x,y)dxdy - I\right| < \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\sigma_\Delta\left(f,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right) - \sigma_\Delta\left(f_p,(\xi_{jk},\eta_{jk})\right)\right| = \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + \left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left[f(\xi_{jk},\eta_{jk}) - f_p(\xi_{jk},\eta_{jk})\right](x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})\right| \le \\
&\le \frac{2\varepsilon}{3} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|f(\xi_{jk},\eta_{jk}) - f_p(\xi_{jk},\eta_{jk})\right|(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) < \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3\,ariaA_2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1}) = \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Acest rezultat ne permite să spunem că $f \in \mathcal{R}(A_2)$ şi că:

$$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = I = \lim_{k\to\infty} \iint_{A_2} f_k(x,y)dxdy$$

8) Fie $f : A_2 \to \mathbb{R}$ şi $A_2 = A_{12} \cup A_{22}$ unde A_{12} şi A_{22} sunt două dreptunghiuri care nu au puncte interioare comune.

Dacă funcția f este integrabilă pe dreptunghiurile A_{12} şi A_{22}, atunci ea este integrabilă şi pe A_2 şi are loc egalitatea

$$\iint_{A_2} f(x,y)dxdy = \iint_{A_{12}} f(x,y)dxdy + \iint_{A_{22}} f(x,y)dxdy \qquad (2.22)$$

(2.22) exprimă proprietatea de <u>aditivitate</u> față de interval a integralei duble.

Demonstrația este imediată şi foloseşte definiția, folosind sumele Riemann.

8.3. Integrala dublă pe domenii simple

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact

<u>Definiție</u>:

Domeniul D se numeşte <u>simplu în raport cu axa OY</u>, dacă este definit de inegalitățile:

$$a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \qquad (3.1)$$

unde φ_1 şi φ_2 sunt funcții continue pe $[a,b]$ şi $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$.

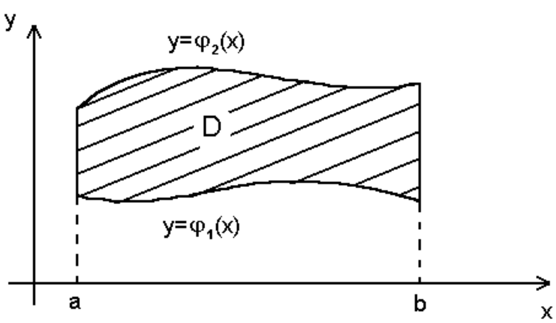
<u>Definiție</u>:

Domeniu D se numeşte <u>simplu în raport cu axa OX</u>, dacă este definit de inegalitățile:

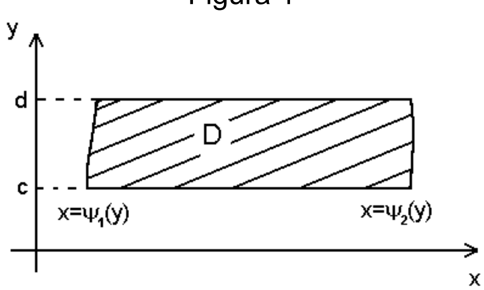
$$c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \tag{3.2}$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sunt funcții continue pe $[c,d]$ şi $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$ pentru orice $y \in [c,d]$.

În fig.1 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa OY, iar în fig.2 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa OX.



- Figura 1 -



- Figura 2 -

Prin analogie cu cazul dreptunghiului $A_2 \subset \mathbb{R}^2$ pentru o funcție $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unde D este un domeniu simplu, se poate introduce noțiunea de integrabilitate şi de integrală dublă pe D, toate proprietățile demonstrate pentru dreptunghi fiind valabile şi pentru un astfel de domeniu.

În cele ce urmează, ne vom referi la calculul integralei duble pe un domeniu simplu.

Teoremă:

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$, domeniul simplu în raport cu axa OY definit de (3.1) şi $f : D \to \mathbb{R}$.

Dacă: a) f este continuă pe D

b) pentru orice $x \in [a,b]$ există $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$

Atunci:

a) există integrala iterată $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$;

b) $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx \tag{3.3}$$

(3.3) este formula de descompunere a integralei duble în două integrale simple pentru un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$, simplu în raport cu axa OY.

Integrala iterată o notăm şi în acest caz mai simplu, $\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Demonstrație:

Deoarece φ_1 şi φ_2 sunt continue pe compactul $[a,b]$ ele sunt şi mărginite şi îşi ating marginile pe acest interval.

Notăm cu $c = \min_{x \in [a,b]} \varphi_1(x)$, $d = \max_{x \in [a,b]} \varphi_2(x)$ şi considerăm dreptunghiul $A_2 = [a,b] \times [c,d]$.

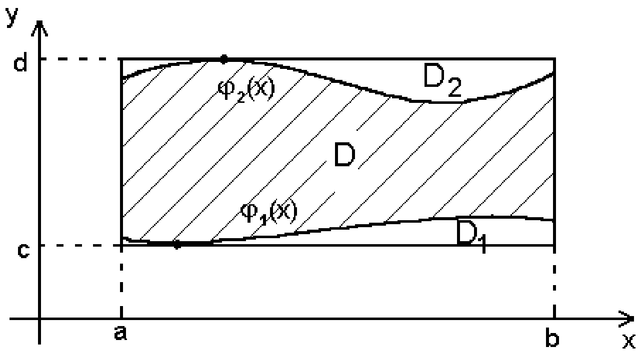
Fie mulțimile:

$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [c, \varphi_1(x)]\}$

$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi_2(x), d]\}$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y \in [\varphi_1(x), \varphi_2(x)]\}$

Evident avem $A_2 = D_1 \cup D \cup D_2$, după cum se observă şi din figura 3.



- Figura 3 -

Fie funcția ajutătoare $\bar{f} : A_2 \to \mathbb{R}$, definită de:

$$\bar{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{pentru } (x,y) \in D \\ 0 & \text{pentru } (x,y) \in A_2 \setminus D \end{cases} \tag{3.4}$$

Ținând seama de faptul că funcția f continuă pe D este integrabilă pe D, se poate arăta că funcția $\bar{f}$ este integrabilă pe dreptunghiul A_2 dacă se foloseşte o teoremă dată de Lebesgue.

Din ipoteza că pentru orice $x \in [a,b]$ există $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x)dy$, putem afirma că există şi integrala $\int_c^d \bar{f}(x,y)dy$, deoarece dacă folosim aditivitatea față de interval a integralei simple, avem:

$$\int_c^d \bar{f}(x,y)dy = \int_c^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x,y)dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \bar{f}(x,y)dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x,y)dy$$

conform (3.4)

Din $\bar{f} \in \mathcal{R}(A_2)$ şi pentru orice $x \in [a,b]$ există $\int_c^d \bar{f}(x,y)dy$, conform teoremei de descompunere a integralei duble pe dreptunghi, avem:

$$\iint_{A_2} \bar{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \bar{f}(x,y)dy$$

$$\iint_{D_1}\bar{f}(x,y)dxdy+\iint_{D}\bar{f}(x,y)dxdy+\iint_{D_2}\bar{f}(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d\bar{f}(x,y)dy$$

Dacă ținem seama de (3.4) obținem:

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

<u>Teoremă 2</u>:

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$, domeniu simplu în raport cu axa OX definit de (3.2) şi o funcție $f:D\to\mathbb{R}$.

Dacă:

a) f continuă pe D

b) pentru orice $y\in[c,d]$ există $\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$

Atunci:

a) există integrala iterată $\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx$;

b) $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \qquad (3.5)$$

<u>Observație</u>:--

Dacă domeniul compact D nu este simplu în raport cu una dintre axele de coordonate, atunci îl descompunem într-un număr finit de subdomenii $D_1,\ldots,D_n$ cu $\bigcup_{k=\overline{1,n}} D_k=D$, fiecare D_k fiind domeniu simplu.

O astfel de descompunere se poate realiza cu ajutorul unor paralele duse la axele de coordonate. În acest caz,

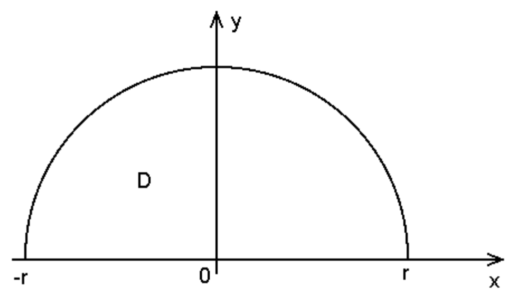
$$\iint_D f(x,y)dxdy=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k} f(x,y)dxdy \qquad (3.6)$$

Exemplu: ---

Să se calculeze $\iint\limits_{D} x^2 y dxdy$

unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2,\ y \ge 0\}$

Domeniul D este semidiscul de raza r situat în semiplanul superior (figura 4).



- Figura 4 -

$$D : \begin{cases} x \in [-r, r] \\ y \in \left[0, \sqrt{r^2 - x^2}\right] \end{cases}$$

Deoarece D este domeniu simplu în raport cu axa OY, integrala se poate calcula astfel:

$$\iint\limits_{D} x^2 y dxdy = \int_{-r}^{r} dx \int_{0}^{\sqrt{r^2 - x^2}} x^2 y dy = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} x^2 (r^2 - x^2) dx = \frac{1}{2}\left[r^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-r}^{r} = \frac{2r^5}{15}$$

Aplicații ale integralei duble

1) Calculul ariei unui domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\text{aria } D = \iint\limits_{D} dxdy} \qquad (3.7)$$

2) Calculul masei unei plăci plane care ocupă domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ având densitatea dată de $\rho : D \to \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{M = \iint\limits_{D} \rho(x,y) dxdy} \qquad (3.8)$$

3) Calculul coodonatelor centrului de greutate al plăcii

$$\boxed{\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy \\ y_g &= \frac{1}{M}\iint_D y\rho(x,y)dxdy \end{aligned}} \tag{3.9}$$

4) Calculul momentelor de interție pentru placă

$$\boxed{\begin{aligned} I_{OX} &= \iint_D y^2\rho(x,y)dxdy \\ I_{OY} &= \iint_D x^2\rho(x,y)dxdy \\ I_O &= \iint_D \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)dxdy \end{aligned}} \tag{3.10}$$

8.4. Integrala triplă

Extinderea teoriei integralei Riemann la funcții de două variabile se poate continua pentru funcții care depind de un număr oarecare de variabile. În cele ce urmează, vom prezenta cazul a trei variabile, pentru ca apoi prin analogie, să putem da teoria pentru n variabile. În cazul de față, introducem noțiunea de integrabilitate pe domenii din $\mathbb{R}^3$ care au volum.

Fie $A_3 \subset \mathbb{R}^3$ paralelipipedul determinat de: $A_3 = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ şi considerăm diviziunile:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b_1) \\ \Delta_2 &= (a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2) \\ \Delta_3 &= (a_3 = z_0 < z_1 < \ldots < z_p = b_3) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Cu ajutorul acestora, vom putea determina o diviziune Δ a lui A_3,

$$\Delta = \left(A_{jkl};\ j=\overline{1,n};\ k=\overline{1,m};\ l=\overline{1,p}\right) \tag{4.2}$$

unde $A_{jkl} = [x_{j-1},x_j]\times[y_{k-1},y_k]\times[z_{l-1},z_l]$

Norma acestei diviziuni este definită de:

$$\|\Delta\| = \max_{\substack{j=\overline{1,n}\\ k=\overline{1,m}\\ l=\overline{1,p}}}\left(\operatorname{diam} A_{jkl}\right) \tag{4.3}$$

Fie o funcție $f : A_3 \to \mathbb{R}$.

Cu ajutorul punctelor arbitrar alese $(\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl}) \in A_{jkl}$, formăm suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f, (\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl})) = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} f(\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl})(x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1}) \tag{4.4}$$

<u>Definiție</u>:

Funcția f este integrabilă pe A_3 $(f \in \mathcal{R}(A_3))$ dacă există un număr I cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(A_3)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice alegere a punctelor $(\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl}) \in A_{jkl}$ are loc inegalitatea:

$$\left|\sigma_\Delta(f, (\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl})) - I\right| < \varepsilon \tag{4.5}$$

Dacă f este integrabilă pe A_3, numărul I din definiție se numeşte <u>integrala funcției f pe A_3</u> (sau integrala triplă a funcției f pe A_3) şi se notează:

$$I = \iiint_{A_3} f(x, y, z)\,dxdydz \tag{4.6}$$

sau mai simplu, $I = \int_{A_3} f$

Definiția este complet analogă celei date pentru funcțiile de două variabile. Fără nici o modificare în demonstrații, se poate extinde teorema Darboux de integrabilitate precum şi teorema care afirmă că orice funcție continuă pe A_2 este integrabilă pe A_2. De asemenea, toate proprietățile subliniate pentru integrala dublă se pot extinde şi la integrala triplă.

Vom enunța în mod special numai proprietățile care conduc la cele trei formule de medie precizând mai întâi că pentru funcția constantă $g : A_3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = 1$, suma Riemann asociată ne dă volumul lui A_3.

$$\sigma_\Delta(g, (\xi_{jkl}, \eta_{jkl}, \zeta_{jkl})) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} (x_j - x_{j-1})(y_k - y_{k-1})(z_l - z_{l-1}) = \\ = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} \text{vol } A_{jkl} = \text{vol } A_3 \tag{4.7}$$

1) Dacă: a) $f \in$ ☼(A_3)

b) $m \le f(x,y,z) \le M \ (\forall)\ (x,y,z) \in A_3$

Atunci:

$$m \cdot \text{vol } A_3 \le \iiint\limits_{A_3} f(x,y,x)\,dxdydz \le M \cdot \text{vol } A_3 \tag{4.8}$$

2) Dacă $f \in C^0(A_3)$, atunci există $(\xi,\eta,\zeta) \in A_3$ astfel încât:

$$\iiint\limits_{A_3} f(x,y,x)\,dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta) \cdot \text{vol } A_3 \tag{4.9}$$

3) Dacă $f \in C^0(A_3)$ şi $g \in$ ☼(A_3), atunci există $(\xi,\eta,\zeta) \in A_3$ astfel încât:

$$\iiint\limits_{A_3} f(x,y,x)g(x,y,z)\,dxdydz = f(\xi,\eta,\zeta)\iiint\limits_{A_3} g(x,y,z)\,dxdydz \tag{4.10}$$

Calculul integralei triple pe paralelipiped

Fie $A_3 = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ şi $f : A_3 \to \mathbb{R}$

Notăm $A_2 = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] \subset \mathbb{R}^2$

Teoremă:

Dacă: a) f este continuă pe A_3

b) pentru orice $(x,y) \in A_2$ există $\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz$

Atunci:

a) există integrala iterată $\iint\limits_{A_2}\left[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$

b) $$\iiint\limits_{A_3} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{A_2}\left[\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy \tag{4.11}$$

Observație:---

Teorema este valabilă şi în cazul unei funcții f numai integrabile pe A_3.

Formula (4.11) ne spune că o integrală triplă se calculează descompunând-o într-o integrală dublă şi una simplă.

Dacă notăm cu $F(x,y)=\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)dz$ şi presupunem că pentru orice $x\in[a_1,b_1]$ există $\int_{a_2}^{b_2} F(x,y)dy$, atunci (4.11) devine:

$$\boxed{\iiint_{A_3} f(x,y,x)dxdydz=\int_{a_1}^{b_1}dx\int_{a_2}^{b_2}dy\int_{a_3}^{b_3}f(x,y,z)dz} \tag{4.12}$$

şi calculul integralei triple se reduce la calcularea celor trei integrale Riemann simple.

Calculul integralei triple pe domenii simple

Fie un domeniu compact $D\subset\mathbb{R}^2$.

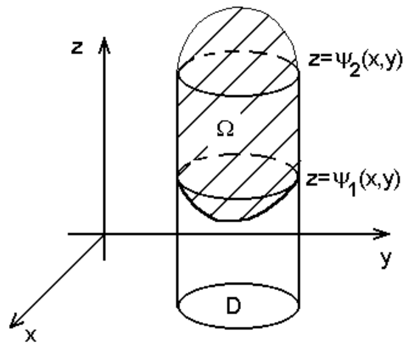
Definiție:

Domeniul compact $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ se nemeşte simplu în raport cu axa OZ, dacă este definit de

$$(x,y)\in D,\ \psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y) \tag{4.13}$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sunt funcții continue pe D şi $\psi_1(x,y)\le\psi_2(x,y)$ pentru orice $(x,y)\in D$

Un astfel de domeniu este ilustrat în figura 5.



- Figura 5 -

Prin analogie, în $\mathbb{R}^3$, putem defini demenii simple în raport cu axele OY şi OZ.

Teoremă:

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axa OZ definit de (4.13) şi o funcție $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Dacă: a) f este continuă pe Ω;

b) pentru orice $(x, y) \in D$ există $\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$

Atunci:

a) există integrala iterată $\iint\limits_D \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy$

b) $$\iiint\limits_\Omega f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D \left[\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz \right] dxdy \qquad (4.14)$$

Dacă domeiul $D \subset \mathbb{R}^2$ este simplu în raport cu axa OY fiind definit de: $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$

atunci (4.14) devine:

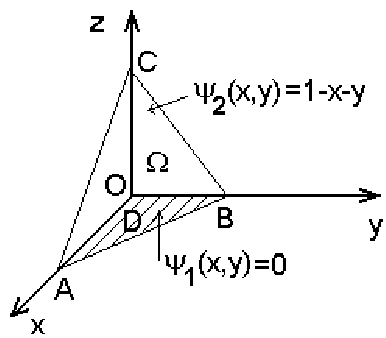
$$\boxed{\iiint\limits_\Omega f(x, y, x)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)dz} \qquad (4.15)$$

Subliniem şi în acest caz faptul că teorema rămâne valabilă şi în cazul în care funcția f este numai integrabilă pe Ω.

<u>Exemplu:</u> ---

Să se calculeze integrala: $I = \iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$

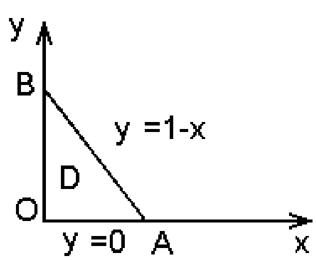
unde Ω este tetraedrul delimitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$. (figura 6).



- Figura 6 -

Se vede imediat că Ω este un domeniu simplu în raport cu OZ şi poate fi reprezentat prin:

$$\Omega : \begin{cases} (x,y) \in D \\ x \in [0,1-x-y] \end{cases} \tag{4.16}$$



- Figura 7 -

De asemenea $D \subset \mathbb{R}^2$ (figura 7) poate fi reprezentat ca domeniu simplu în raport cu axa OY prin:

$$\Omega : \begin{cases} x \in [0,1] \\ y \in [0,1-x] \end{cases} \tag{4.17}$$

Prin urmare, integrala dată se poate calcula astfel:

$$I = \iint_D dxdy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$$

Însă

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = \frac{-1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]$$

Deci:

$$I = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right]dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4}\right)dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$$

Aplicații ale integralei triple

1) Calculul volumului unui domeniu compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$\boxed{V = \iiint_\Omega dxdydz} \tag{4.18}$$

2) Calculul masei unui corp tridimensional care ocupă domeniul compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ având densitatea dată de funcția $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{M = \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz} \tag{4.19}$$

3) Calculul coodonatelor centrului de greutate al acestui corp

$$\boxed{\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho(x,y,z)dxdydz \\ y_g &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)dxdydz \\ z_g &= \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)dxdydz \end{aligned}} \tag{4.20}$$

4) Calculul momentelor de interție fața de axele de coordonate, planele de coordonate sau originea sistemului de axe.

$$
\boxed{
\begin{aligned}
I_{OX} &= \iiint_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz \\
I_{XOY} &= \iiint_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz \\
I_{O} &= \iiint_{\Omega} \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x,y,z)dxdydz
\end{aligned}
}
\tag{4.21}
$$

5) Potențialul newtonian în punctul $P_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ creat de acest corp.

$$
\boxed{U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x,y,z)dxdydz}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}}
\tag{4.22}
$$

8.5. Schimbarea de variabilă în integrala multiplă

Pentru o funcție $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (E domeniu compact) putem introduce noțiunea de integrabilitate şi de integrală multiplă de ordinul n a funcției f pe compactul E, notată:

$$
\iint_{E} \ldots \int f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n
\tag{5.1}
$$

Procedeul este analog cazurilor n=2 sau n=3.

Pentru integrala (5.1) se poate enunța teorema de descompunere într-o integrală multiplă de ordinul n-1 şi o integrală simplă.

În multe cazuri, în funcție de forma domeniului, se preferă să se apeleze la o schimbare de variabilă, calculele simplificându-se considerabil.

În cele ce urmează, vom încerca să punctăm problema schimbării de variabilă în integrala multiplă, fără a intra în detaliul demonstrațiilor.

Fie funcția vectorială $\Phi : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right)$ definită de relatiile:

$$
\begin{cases}
x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_n) \\
\ldots \\
x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)
\end{cases}
\qquad \left(t_1, .. t_n\right) \in E
\tag{5.2}
$$

şi $t_0 = (t_{01}, t_{02}, ..., t_{0n}) \in \overset{\circ}{E}$

<u>Definiție</u>:

Funcția $\underline{\Phi}$ <u>este</u> <u>regulată</u> <u>în</u> $\underline{t_0}$ dacă:

a) $\Phi \in C^1(V(t_0))$**,** $V(t_0)$ **este o vecinătate a punctului** t_0**.**

b) Determinantul funcțional $\left.\dfrac{D(\varphi_1, ..., \varphi_n)}{D(t_1, ..., t_n)}\right|_{t=t0} \neq 0$

De asemenea, vom spune că funcția $\underline{\Phi}$ <u>este</u> <u>regulată</u> <u>pe</u> <u>mulțimea</u> <u>deschisă</u> $\underline{E \subset \mathbb{R}^n}$ dacă ea este regulată în orice punct $t \in E$.

Funcția Φ o mai numim şi <u>transformare</u> <u>regulată</u>. O astfel de funcție transformă compactul $E \subset \mathbb{R}^n$ tot într-un compact, $\Phi(E) \subset \mathbb{R}^n$.

Se demonstrează următoarea:

<u>Teoremă</u>:

Fie funcția $f : \Phi(E) \to \mathbb{R}$

Dacă:

a) $\Phi \in E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o transformare regulată.

b) f este continuă pe $\Phi(E)$

Atunci există şi sunt egale următoarele integrale:

$$\iint\limits_{\Phi(E)} ... \int f(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n = \qquad (5.3)$$

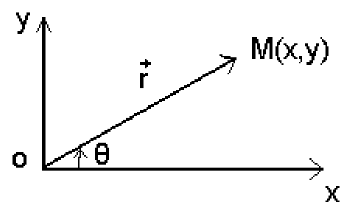
$$= \iint\limits_{E} ... \int f[\varphi_1(t_1, ..., t_n), ..., \varphi_n(t_1, ..., t_n)] \left| \frac{D(\varphi_1, ..., \varphi_n)}{D(t_1, ..., t_n)} \right| dt_1 ... dt_n$$

(5.3) este <u>formula schimbării de variabile în integrala multiplă</u>.

În continuare, vom da <u>exemple</u> <u>de</u> <u>schimbări</u> <u>de</u> <u>variabil</u>e folosite pentru calculul integralelor duble şi triple.

1) <u>Schimbarea de variabile în coordonate polare</u>

Pornind de la coordonatele polare r şi θ, putem defini transformarea regulată $\Phi : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ prin



$$\begin{cases} x = \varphi_1(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = \varphi_2(r,\theta) = r\sin\theta \end{cases}, \quad (r,\theta) \in E \subset \mathbb{R}^2 \tag{5.4}$$

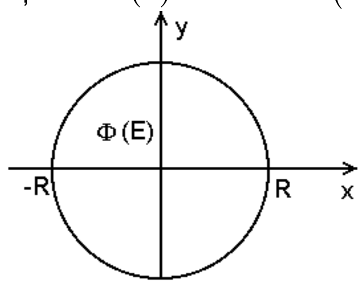
În acest caz

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \tag{5.5}$$

Pentru o funcție $f : \Phi(E) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f continuă pe $\Phi(E)$ avem:

$$\boxed{\iint\limits_{\phi(E)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{E} f(r,\theta) r dr d\theta} \tag{5.6}$$

Dacă, în particular, mulțimea $\Phi(E)$ este discul $\left(x^2 + y^2\right) \leq R^2$ (figura 8)

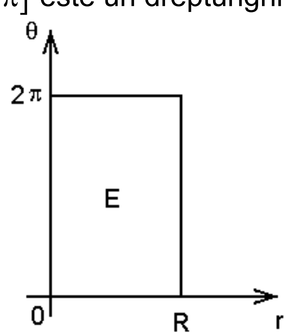


- Figura 8 -

pentru transformarea regulată Φ,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} r \in [0,R] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{matrix} \tag{5.7}$$

mulțimea $E = [0,R] \times [0,2\pi]$ este un dreptunghi (figura 9)



- Figura 9 -

şi conform (5.6) avem:

$$\iint\limits_{\Phi(E)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{E} f(r,\theta)rdrd\theta = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} f(r,\theta)d\theta \tag{5.8}$$

Astfel, aria discului de rază R, se calculează simplu:

$$A = \iint\limits_{\Phi(E)} dxdy = \int_0^R rdR \int_0^{2\pi} d\theta = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^R \left.\theta\right|_0^{2\pi} = \pi R^2$$

2) <u>Schimbarea de variabile în coordonate polare generalizate</u>

Transformarea regulată $\Phi : E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este definită prin relațiile:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(r,\theta) = ar\cos\theta \\ y = \varphi_2(r,\theta) = br\cos\theta \end{cases} \quad (r,\theta) \in E\,; \quad a,b \in \mathbb{R} \tag{5.9}$$

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(r,\theta)} = abr \tag{5.10}$$

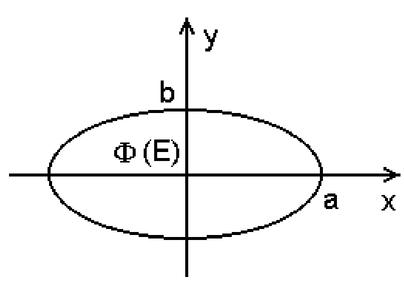
Pentru $f : \Phi(E) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(\Phi(E))$ avem:

$$\boxed{\iint\limits_{\Phi(E)} f(x,y)dxdy = ab\iint\limits_{E} f(r,\theta)rdrd\theta} \tag{5.11}$$

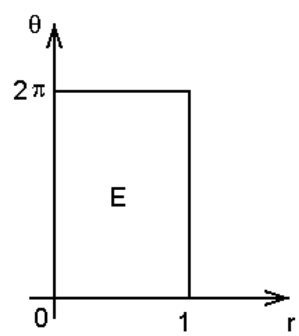
Cu ajutorul transformării regulate (5.9) putem calcula aria elipsei cu semiaxele a şi b, a cărei ecuație este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

În cazul de față,

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} r \in [0,1] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{matrix} \tag{5.12}$$



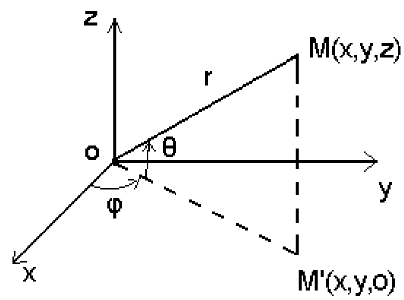
- Figura 10 -



- Figura 11 -

$$A = \iint\limits_{\Phi(E)} dxdy = ab \iint\limits_{\Phi(E)} rdrd\theta = ab\int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\theta = ab\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^1 \left.\theta\right|_0^{2\pi} = \pi ab$$

3) <u>Schimbarea de variabile în coordonate sferice</u>
Pornind de la coordonatele sferice r, θ, φ



putem defini transforamrea regulată $\Phi : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ prin relațiile:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = \varphi_2(r,\varphi,\theta) = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = \varphi_3(r,\varphi,\theta) = r\sin\theta \end{cases}, \ (r,\varphi,\theta) \in E \subset \mathbb{R}^3 \qquad (5.13)$$

Pentru această transformare, determinantul funcționale este:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(r,\varphi,\theta)} = r^2\cos\theta \qquad (5.14)$$

Pentru $f : \Phi(E) \to \mathbb{R}$, $f \in C^0(\Phi(E))$ avem

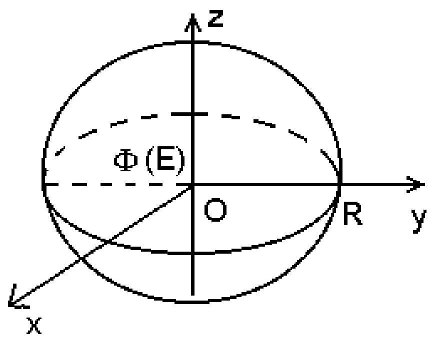
$$\boxed{\iiint\limits_{\Phi(E)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{E} f(r,\varphi,\theta)r^2\cos\theta drd\theta d\varphi} \qquad (5.15)$$

Dacă mulțimea $\Phi(E)$ este sfera $x^2 + y^2 + z^2 \le R$.
Din figura 12, pentru transformarea regulată Φ cu

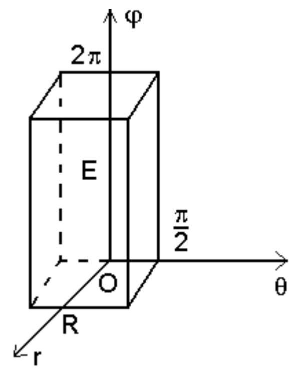
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in [0,R] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi \in [0,2\pi) \end{array} \qquad (5.16)$$

mulțimea E este paralelipipedul (figura 13), definit de:

$$E = [0,R] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi]$$



- Figura 12 -



- Figura 13

Conform (5.15) avem:

$$\iiint_{\Phi(E)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{E} f(r,\varphi,\theta) r^2 \cos\theta drd\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} f(r,\theta,\varphi) d\varphi \tag{5.17}$$

Astfel, putem calcula cu uşurință volumul sferei de rază R.

$$V = \iiint_{\Phi(E)} dxdydz = \iiint_{E} r^2 \cos\theta drd\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^R \sin\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

4) <u>Schimbarea de variabile în coordonate sferice generalizate</u>

Transformarea regulată $\Phi : E \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ este definită astfel:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(r,\varphi,\theta) = ar\cos\theta\cos\varphi \\ y = \varphi_2(r,\varphi,\theta) = br\cos\theta\sin\varphi \ , \quad (r,\varphi,\theta) \in E \subset \mathbb{R}^3 \\ z = \varphi_3(r,\varphi,\theta) = cr\sin\theta \end{cases} \tag{5.18}$$

unde $a,b,c \in \mathbb{R}$, iar determinantul funcțional este:

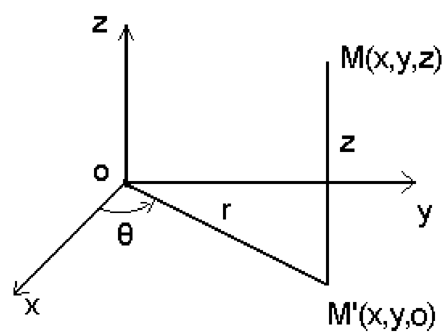
$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(r,\varphi,\theta)} = abcr^2\cos\theta \tag{5.19}$$

Pentru $f:\Phi(E)\to \mathbb{R},\ f\in C^0(\Phi(E))$ avem:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Phi(E)} f(x,y,z)dxdydz = abc\iiint\limits_{E} f(r,\varphi,\theta)r^2\cos\theta drd\theta d\varphi} \tag{5.20}$$

5) <u>Schimbarea de variabile în coordonate cilindrice</u>

Pornind de la coordonatele cilindrice r,θ,z



putem defini transformarea regulată $\Phi: E\subset \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ prin:

$$\begin{cases} x=\varphi_1(r,\theta,\varphi)=r\cos\theta \\ y=\varphi_2(r,\theta,\varphi)=r\sin\varphi\,, \quad (r,\theta,z)\in E\subset\mathbb{R}^3 \\ z=\varphi_3(r,\theta,\varphi)=z \end{cases} \tag{5.21}$$

Determinantul funcțional este:

$$\frac{D(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)}{D(r,\varphi,\theta)}=r$$

iar pentru $f:\Phi(E)\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f\in C^0(\Phi(E))$ obținem:

$$\boxed{\iiint\limits_{\Phi(E)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{E} f(r,\theta,z)rdrd\theta d\varphi} \tag{5.22}$$

8.6. Integrale simple improprii

Noțiunea de integrală (definită) a fost introdusă pentru funcții mărginite definite pe un compact.

Prin urmare, ne putem pune problema în ce măsură poate fi extinsă noțiunea de integrală (definită) pentru funcții mărginite sau nemărginite definite pe un interval necompact.

Definiție:

Integrala definită pentru o funcție mărginită sau nemărginită pe un interval necompact, dacă există, se numeşte integrală improprie sau integrală generalizată.

Pentru a înțelege mai bine acest tip de integrabilitate, să începem cu următoarele exemple:

1) Funcția $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ este funcție continuă pe orice compact $[a,u]\subset[a,+\infty)$ deci integrabilă pe $[a,u]$, iar integrala

$$\int_a^u f(x)dx=\int_a^u \frac{dx}{1+x^2}=\text{arctg } u-\text{arctg } a$$

reprezintă aria domeniului cuprins între graficul funcției, axa OX şi dreptele $x=a$, $x=u$.

Cu observația că

$$\lim_{u\to\infty}\left[\text{actg } u-\text{arctg } a\right]=\frac{\pi}{2}-\text{arctg } a$$

putem afirma că se poate da un sens integralei improprii, $\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^2}$, ca arie a domeniului nemărginit cuprins între graficul funcției, axa OX şi dreapta $x=a$.

2) Funcția $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ este continuă, deci integrabilă pe orice compact $[1,u]\subset[1,+\infty)$ şi avem:

$$\int_1^u f(x)dx = \int_1^u \frac{dx}{x} = \ln\ u$$

Cum $\lim\limits_{u\to\infty} \ln u = \infty$, putem afirma, în cazul de față, că integrala $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ nu are sens.

3) Funcția $f:[0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ este continuă, deci integrabilă pe orice compact $[0,u] \subset [0,1)$, iar

$$\int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin u$$

Cum $\lim\limits_{\substack{u\to 1\\ u<1}} \mathrm{arcsinnu} = \frac{\pi}{2}$, înseamnă că putem da un sens integralei $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pe intervalul necompact $[0,1)$.

4) Funcția $f:(0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ este continuă, deci integrabilă pe orice compact $[u,1] \subset (0,1]$ şi avem:

$$\int_u^1 f(x)dx - \int_u^1 \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2}$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} \left[\frac{1}{2u^2} - \frac{1}{2}\right] = \infty$, putem afirma că, în acest caz, nu putem da un sens integralei $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$ pe intervalul (0,1].

Fie o funcție $f:[a,b) \to \mathbb{R}$ unde b poate fi finit sau infinit. Presupunem că $f \in \mathcal{R}([a,u])$ pentru orice compact $[a,u] \subset [a,b)$.

<u>Definiție</u>:

Funcția f este integrabilă impropriu (în sens generalizat) pe $[a,b)$ dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{\substack{u\to b\\u<b}}\int_a^u f(x)dx \overset{(not)}{=} \int_a^b f(x)dx \quad \text{sau} \quad \int_a^{b-0} f(x)dx$$

În acest caz, spunem că integrala improprie $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă.

<u>Observații</u>:---

1) Dacă f este integrabilă pe compactul $[a,b]$ atunci ea este şi inegrabilă în sens generalizat pe $[a,b)$ iar cele două integrale sunt egale.

Reciproca nu este totdeauna adevărată.

2) Dacă $\lim_{\substack{u\to b\\u<b}}\int_a^u f(x)dx$ nu există sau este infinită, atunci integrala $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este divergentă.

3) Funcția $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ unde a este finit sau infinit este integrabilă impropriu pe acest interval, dacă există şi este finită limita:

$$\lim_{\substack{u\to a\\u>a}}\int_u^b f(x)dx \overset{(not)}{=} \int_{a+0}^b f(x)dx$$

4) Dacă $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, atunci prin definiție:

$$\int_{a+0}^{b-0} f(x)dx = \int_{a+0}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b-0} f(x)dx \tag{6.1}$$

unde $a<c<b$, iar integrala din stânga este convergentă numai dacă cele două integrale din dreapta sunt convergente:

5) Dacă $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$ atunci, prin definiție

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c-0} f(x)dx + \int_{c+0}^{b} f(x)dx \tag{6.2}$$

La fel, integrala din stânga este convergentă, dacă cele două integrale din dreapta sunt convergente.

6) Dacă în (6.2) cel puțin una dintre integralele din dreapta este divergentă, dar există şi este finită limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right] \tag{6.3}$$

atunci spunem că <u>f este integrabilă pe $[a,b]$ în sens Cauchy</u> (în sensul valorii principale) şi notăm:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right] = V_p\int_a^b f(x)dx \tag{6.4}$$

<u>Exemplu:</u> ---

Funcția $f:[a,b]\setminus\{c\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x-c}$ nu este integrabilă impropriu pe acest interval deoarece

$$\int_a^{c-0} f(x)dx = \int_a^{c-0}\frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{u\to c\\ u<c}}\int_a^u \frac{dx}{x-c} = \lim_{\substack{u\to c\\ u<c}}\left[\ln|u-c| - \ln|a-c|\right] = -\infty$$

Dar $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\displaystyle\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right] = \ln\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|$ (finită)

şi putem trage concluzia că funcția dată este integrabilă în sens Cauchy pe $[a,b]$.

<u>Definiție</u>:

Integrala improprie $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x)dx$ **(unde** b **este finit sau infinit) este <u>absolut convergentă</u>, dacă integrala** $\displaystyle\int_a^{b-0}|f(x)|dx$ **este convergentă.**

Criterii de convergență

1) Criteriul lui Cauchy

Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b este finit sau infinit) şi presupunem că f este integrabilă pe orice compact $[a,u]\subset[a,b)$.

Integrala $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un $b_\varepsilon<b$ astfel încât pentru orice $u',u''<b$, cu proprietatea $b_\varepsilon<u'<u''<b$ are loc inegalitatea

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)dx\right|<\varepsilon \qquad (6.5)$$

Demonstrație:

Notăm $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ pentru $(\forall)$ $u\in(a,b)$. Dacă $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este convergentă, atunci există şi este finită limita, $\lim\limits_{\substack{u\to b\\ u<b}}\int_a^u f(x)dx$ $\Rightarrow$ funcția F are limită finită în $u=b$ $\Rightarrow$ conform criteriului Cauchy-Bolzano de la funcții avem: pentru orice $\varepsilon>0$ există $b_\varepsilon<b$ astfel încât pentru orice u',u'' cu $b_\varepsilon<u'<u''<b$ să avem:

$$|F(u'')-F(u')|<\varepsilon \qquad (6.6)$$

Rezultă

$$\left|\int_a^{u''} f(x)dx-\int_a^{u'} f(x)dx\right|<\varepsilon$$

adică $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)dx\right|<\varepsilon$

Deoarece condiția din criteriul Cauchy-Bolzano este necesară şi suficientă, rezultă şi implicația inversă.

2) Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathcal{R}([a,u])$ oricare ar fi compactul $[a,u]\subset[a,b)$.

> Dacă $\int_a^{b-0} f(x)dx$ este absolut convergentă atunci ea este şi convergentă.

Demonstrație:

Din $\int_a^{b-0} f(x)dx$ absolut convergentă $\Rightarrow$ $\int_a^{b-0} |f(x)|dx$ convergentă $\Rightarrow$ conform criteriului Cauchy avem pentru $(\forall)\ \varepsilon>0$ $(\exists)$ $b_\varepsilon<b$, astfel încât pentru orice $b_\varepsilon<u'<u''<b$ are loc onegalitatea:

$$\int_{u'}^{u''} |f(x)|dx<\varepsilon \tag{6.7}$$

Dar $\left|\int_{u'}^{u''} f(x)dx\right|\le\int_{u'}^{u''}|f(x)|dx<\varepsilon$ şi conform criteriului lui Cauchy, rezultă $\int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă.

3) Criteriul comparației

> Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ (b finit sau infinit)
>
> Dacă: a) $0\le f(x)\le g(x)$ pentru orice $x\in[a,b]$,
>
> b) f şi $g\in\mathcal{R}([a,u])$ pentru orice $[a,u]\subset[a,b)$
>
> Atunci:
>
> a) $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow$ $\int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă
>
> b) $\int_a^{b-0} f(x)dx$ divergentă $\Rightarrow$ $\int_a^{b-0} g(x)dx$ divergentă

Demonstrație:

a) Din $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă $\Rightarrow$ exsită şi este finită $\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}} \int_a^u g(x)dx$.

Notăm $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ şi folosim proprietatea de monotonie a integralei simple

$$F(u)=\int_a^u f(x)dx \le \int_a^u g(x)dx \le \lim_{\substack{u\to b\\u<b}} \int_a^u g(x)dx$$

Rezultă că funcția F crescătoare pe $[a,b)$ este şi mărginită pe acest interval. Deci există $\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}} F(u)=\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}} \int_a^u f(x)dx =$ finită. Rezultă că $\int_a^u f(x)dx$ este convergentă.

b) Dacă presupunem $\int_a^{b-0} g(x)dx$ convergentă, conform punctului a) ar rezulta $\int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă, deci contradicție.

4) Fie funcția $f:[a,+\infty)\to \mathbb{R}$, $a>0$

Dacă: a) $f(x)>0$ $(\forall)$ $x\in[a,+\infty)$, b) $f\in \mathcal{R}([a,u])$ $(\forall)$ $[a,u]\subset[a,+\infty)$ c) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x)=A>0$ Atunci: a) dacă $\alpha>1$, $0\le A<\infty$ $\Rightarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **convergentă** b) **dacă** $\alpha\le 1$, $0<A\le\infty$ $\Rightarrow$ $\int_a^{\infty} f(x)dx$ **divergentă**

Demonstrație:

Din $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = A \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_{\varepsilon} > a$ astfel încât pentru orice $x > b_{\varepsilon}$ avem:

$\left| x^{\alpha} f(x) - A \right| < \varepsilon$, adică $A - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < A + \varepsilon$, sau

$$\boxed{\frac{A-\varepsilon}{x^{\alpha}} < f(x) < \frac{A+\varepsilon}{x^{\alpha}}} \tag{6.8}$$

În continuare, se foloseşte criteriul comparației stabilind, mai întâi, natura integralei $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ după valorile parametrului α.

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{u\to\infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_a^u = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u\to\infty} \left[u^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} \right] = \begin{cases} \infty \text{ pentru } \alpha < 1 \\ \dfrac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ pentru } \alpha > 1 \end{cases}$$

Pentru $\alpha = 1$ avem

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} [\ln u - \ln a] = \infty$$

Se obține

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \begin{matrix} \text{convergentă pentru } \alpha > 1 \\ \text{divergentă pentru } \alpha \le 1 \end{matrix} \tag{6.9}$$

5) Fie funcția $f : [a,b) \to \mathbb{R}$, b finit

Dacă:

a) $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in [a,b)$,

b) $f \in \mathcal{R}([a,u])$ $(\forall)$ $[a,u] \subset [a,b)$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to b \\ x<b}} (b-x)^{\alpha} f(x) = A > 0$

Atunci:

a) dacă $\alpha < 1$, $0 \le A < \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ convergentă

b) dacă $\alpha \ge 1$, $0 < A \le \infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)dx$ divergentă

Demonstrație:

Din $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x<b}}(b-x)^{\alpha}f(x) \overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru orice $\varepsilon>0$ există $b_{\varepsilon}<b$ astfel încât pentru orice $b_{\varepsilon}<x<b$ se poate scrie egalitatea:

$\left|(b-x)^{\alpha}f(x)-A\right|<\varepsilon$, adică

$$\boxed{\frac{A-\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}<f(x)<\frac{A+\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}} \tag{6.10}$$

Şi în acest caz se foloseşte criteriul comparației după ce se stabileşte natura integralei $\int\limits_{a}^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}$

$$\int\limits_{a}^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}}\int\limits_{a}^{u}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}}\left[(b-a)^{1-\alpha}-(b-u)^{1-\alpha}\right]=\begin{cases}\infty\ ,\ \alpha>1\\ \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha},\alpha<1\end{cases}$$

Pentru $\alpha=1$, integrala este

$$\int\limits_{a}^{b-0}\frac{dx}{b-x}=\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}}\int\limits_{a}^{u}\frac{dx}{b-x}=\lim\limits_{\substack{u\to b\\u<b}}\left[\ln|b-a|-\ln|b-u|\right]=\infty$$

Se obține

$$\int\limits_{a}^{b-0}\frac{dx}{(b-x)^{\alpha}}\quad \begin{matrix}\text{convergentă pentru } \alpha<1\\ \text{divergentă pentru } \alpha\geq 1\end{matrix} \tag{6.11}$$

Exemple: **--**

1) Integrala $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+x^{2}+2}}$ este convergentă deoarece

$$\lim\limits_{x\to\infty}x^{\alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^{3}+x^{2}+2}}=1 \text{ dacă } \alpha=\frac{3}{2}>1$$

2) Integrala $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}ctgx dx$ este divergentă deoarece

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^{\alpha}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^{\alpha}\frac{\cos x}{\sin x}=1 \text{ pentru } \alpha=1$$

3) Integrala $\int_a^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx$, $a > 0$ este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$

Într-adevăr, pentru $x > 0$ putem scrie

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots > \frac{x^n}{n!},\ n \in \mathbb{N}$$

rezultă

$$0 < e^{-x} < \frac{n!}{x^n} \text{ adică } x^{\alpha} e^{-x} < \frac{n!}{x^{n-\alpha}}$$

Cum pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ se poate determina un $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $n - \alpha > 1$ şi cum $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{n-\alpha}}$ este convergentă conform rezultatului (6.9), putem apela la criteriul comparației şi tragem concluzia că integrala dată este convergentă pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Integrala $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ este convergentă conform rezultatului (6.11) deoarece $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, iar integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ este divergentă conform aceluiaşi rezultat deoarece $\alpha = \frac{3}{2} > 1$.

5) <u>Integrala Euler-Poisson</u>, $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ este covergentă conform criteriului comparației.

Într-adevăr, putem scrie

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \tag{6.12}$$

Folosim inegalitatea

$$e^{-x^2} \le e^{-x} \text{ pentru } x \ge 1 \tag{6.13}$$

şi calculăm:

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^{u} e^{-x}dx = \lim_{u\to\infty}\left[\frac{1}{e} - e^{-u}\right] = \frac{1}{e}$$

Din convergența integralei $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ şi (6.13) rezultă convergența integralei $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$.

Calculul integralei Euler-Poisson

Vom da o metodă simplă pentru calculul acestei integrale folosind monotonia integralei simple şi inegalitățile:

$$\begin{cases} \left(1 - x^2\right)^n \le e^{-nx^2} & \text{pentru} \quad x \in [0,1] \\ e^{-nx^2} \le \dfrac{1}{\left(1 + x^2\right)^n} & \text{pentru} \quad x \in [0,\infty) \end{cases} \tag{6.14}$$

Putem scrie că:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \le \int_0^1 e^{-nx^2}dx \le \int_0^{\infty} e^{-nx^2}dx \le \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^n}dx$$

şi reținem

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx \le \int_0^{\infty} e^{-nx^2}dx \le \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^n}dx \tag{6.15}$$

Pentru $I_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx$ deducem relația de recurență $I_n = \frac{2n}{2n + 1}I_{n-1}$ astfel că obținem:

$$I_n = \frac{(2n)!!}{(2n + 1)!!} \tag{6.16}$$

Pentru $J_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + x^2\right)^n}dx$ deducem relația de recurență $J_n = \frac{2n - 3}{2n - 2}J_{n-1}$ şi obținem:

$$J_n = \frac{\pi}{2}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \tag{6.17}$$

De asemenea $\int_0^\infty e^{-nx^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ dacă facem schimbarea $\sqrt{n}x = t$.

Astfel şirul de inegalităţi (6.15) se scrie:

$$\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \int_0^\infty e^{-x^2}dx \le \frac{\pi}{2}\sqrt{n}\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \tag{6.18}$$

Ţinem seama de limita lui Wallis,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{2n+1}(2n-1)!!} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{6.19}$$

şi deducem

$$\boxed{\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}} \tag{6.20}$$

8.7. Integrale multiple improprii

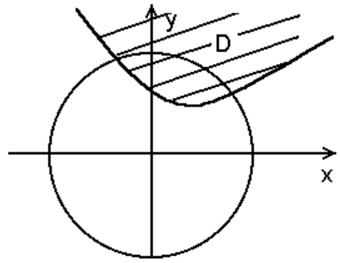
Pentru simplitate, vom prezenta numai cazul integralei duble, rezultatele putând cu uşurinţă să fie extinse, pentru integrala triplă sau integrala multiplă de un ordin oarecare.

Am definit integrala dublă $\iint_D f(x,y)dxdy$ a funcţiei reale f, definită şi mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vom extinde această definiţie mai întâi pentru cazul în care D nu mai este mărginit şi apoi pentru cazul în care pe domeniul D mărginit este definită o funcţie nemărginită.

Definiţie:

Domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$ este nemărginit dacă el conţine puncte exterioare oricărui disc cu centrul în originea sistemului de coordonate (figura 14).



- Figura 14 -

<u>Definiție</u>:

Mulțimea nemărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ **<u>admite o exhausțiune</u>, dacă există un şir** $(D_n)_{n \in N}$ **de domenii compacte din** $\mathbb{R}^2$ **cu proprietățile:**

1) $D_1 \subset D_2 \subset D_3 \subset \ldots$**,** $\bigcup_{n \geq 1} D_n = D$

2) pentru orice mulțime compactă $A \subset D$ **există un** $n \in \mathbb{N}$ **astfel ca** $A \subset D_n$

De exemplu, dacă considerăm şirul crescător de numere pozitive $(R_n)_{n \in N}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} R_n = \infty$, şi discurile $K_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R_n^2\}$, putem defini mulțimile compacte $D_n = K_n \cap D$.

Şirul $(D_n)_{n \in N}$ astfel construit, este o exhaustiune a domeniului nemărginit D.

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D este domeniu nemărginit şi presupunem că f este integrabilă pe orice subdomeniu compact $A \subset D$.

<u>Definiție</u>:

Funcția <u>f este integrabilă impropriu pe domeniul nemărginit D</u>, dacă există un număr finit $I \in \mathbb{R}$ **astfel ca pentru orice exhaustiune** $(D_n)_{n \in N}$ **a lui** D **să avem:**

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dxdy = I \tag{7.1}$$

Numărul I se notează:

$$I = \iint_D f(x, y)\,dxdy \tag{7.2}$$

şi se numeşte <u>integrala improprie a funcției f</u> pe domeniul nemărginit D. În acest caz mai spunem că <u>integrala improprie este convergentă</u>.

<u>Exemplu:</u> --

Funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy$ nu este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$.

Vom considera două exhaustiuni distincte pentru $\mathbb{R}^2$.

*) Fie exhaustiunea $(D_n)_{n\in N}$ formată din discurile $D_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le n^2\}$

Calculăm $\iint\limits_{D_n} f(x,y)dxdy$ folosind coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,n] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D_n} xydxdy = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\cos\theta d\theta = \int_0^n r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^n + \left.\frac{\sin^2\theta}{2}\right|_0^{2\pi} = 0$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D_n} xydxdy = 0$.

**) Fie exhaustiunea $(D'_n)_{n\in N}$ formată din pătratele $D'_n = [-n,2n] \times [-n,2n]$

$$\iint\limits_{D'_n} xydxdy = \int_{-n}^{2n} xdx \int_{-n}^{2n} ydy = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-n}^{2n} \left.\frac{y^2}{2}\right|_{-n}^{2n} = \left(\frac{3n^2}{2}\right)$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D'_n} xydxdy = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2}{2}\right)^2 = \infty$ tragem concluzia că $\iint\limits_{R^2} xydxdy$ este o integrală improprie divergentă.

Pentru integralele improprii pe domenii nemărginite, subliniem următoarele

-- 🕮

Criterii de integrabilitate

1) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D - domeniu nemărginit, $f(x,y) \geq 0$ pentru orice $(x,y) \in D$, şi f integrabilă pe orice compact $A \subset D$.

> Funcția f este integrabilă impropriu pe D dacă şi numai dacă există o exhaustiune $(D_n)_{n\in N}$ a domeniului nemărginti D astfel ca să existe şi să fie finită limita.
>
> $$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$$
>
> şi avem $\iint_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy$

<u>Observație</u>:---

În cazul funcțiilor pozitiv definite, este suficientă verificarea condiției (7.1) din definiție, cu o singură exhaustiune.

--

<u>Demonstrație</u>:

Implicația "$\Rightarrow$" este efidentă conform definiției.
Pentru implicația "$\Leftarrow$" presupunem că pentru exhaustiunea $(D_n)_{n\in N}$ există şi este finită

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)dxdy = I \tag{7.3}$$

Fie o altă exhaustiune $(D'_n)_{n\in N}$ a lui D. Cum $D'_n \subset D$ este o mulțime compactă va exista un $K_n \in \mathbb{N}$ astfel ca $D'_n \subset D_{K_n}$.

Cum $f(x,y) \geq 0$ pe D, avem:

$$\iint_{D'_n} f(x,y)dxdy \leq \iint_{D_{K_n}} f(x,y)dxdy \leq I \tag{7.4}$$

şi rezultă că şirul monoton crescător $\left(\iint_{D'_n} f(x,y)dxdy \right)_{n\in N}$ este mărginit superior, deci este convergent.
Prin urmare, există $I' \in \mathbb{R}$, mărginit astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D'_n} f(x,y)dxdy = I' \tag{7.5}$$

În plus putem scrie

$$I' \le I \tag{7.6}$$

Schimbând rolul celor două exhaustiuni obținem:

$$I \le I' \tag{7.7}$$

de unde deducem $\underline{I = I'}$. Cum exhaustiunea $(D'_n)_{n\in N}$ a fost aleasă arbitrar, deducem că f este integrabilă impropriu pe D.

Exemplu: --

Funcția $f : D = [0,\infty]\times[0,\infty] \to (0,\infty)$, $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ este integrabilă pe D.

Fiind funcție pozitiv definită, este suficient să considerăm o singură exhaustiune (D_n).

De exemplu, considerăm sferturi de disc: $D_n = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le n^2, x \ge 0, y \ge 0\}$ şi calculăm $\iint_{D_n} f(x,y)dxdy$

folosind coordonatele polare: $\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,n] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,\pi/2] \end{cases}$

$$\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} re^{-r^2} d\theta = \int_0^n re^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-n^2}}{2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-n^2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Deci integrala este convergentă şi avem:

$$\iint_{[0,\infty)\times[0,\infty)} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$$

-- 🕮

2) Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D domeniu nemărginit şi presupunem că f şi $|f|$ sunt integrabile pe orice compact $A \subset D$.

> Funcția f este integrabilă impropriu pe D dacă şi numai dacă $|f|$ este integrabilă impropriu pe D.

3) Criteriul de comparație

Fie $f,g: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D domeniu nemărginit şi presupunem că f şi g sunt integrabile pe orice compact $A \subset D$.

> Dacă: a) g este integrabilă impropriu pe D
>
> b) $|f(x,y)| \le |g(x,y)|$ $(\forall)$ $(x,y) \in D$
>
> Atunci f este integrabilă impropriu pe D.

Exemplu: --

Funcția $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D nemărginit, $f(x,y) = \dfrac{\sin(x,y)}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$ este integrabilă impropriu pe D pentru $\alpha > 1$.

Avem $\left|\dfrac{\sin(x+y)}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}\right| \le \dfrac{1}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$

Cum funcția $\dfrac{1}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha}$ este pozitiv definită pe $\mathbb{R}^2$, verificarea integrabilității acesteia pe domeniul nemărginit $D \subset \mathbb{R}^2$ o facem folosind o singură exhausiune.

Fie $(D_n)_{n\in N}$ unde $D_n = K_n \cap D$, K_n fiind discul de rază n centrat în origine.

$K_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \le n^2\}$

Deoarece $g(x,y) > 0$ pe D iar $D_n \subset K_n$, putem scrie:

$$\iint_{D_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha} \le \iint_{K_n} \frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^\alpha} = \int_0^n dr \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2+a^2)^\alpha} d\theta =$$

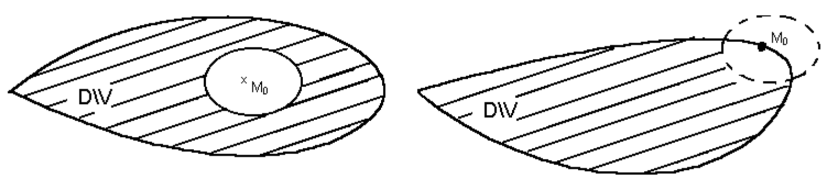
$$= \int_0^n \frac{r}{(r^2+a^2)^\alpha} dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \frac{1}{2} \frac{(r^2+a^2)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_0^n = \frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(n^2+a^2)^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{2(\alpha-1)}}\right]$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\iint\limits_{K_n}\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{\alpha}}=-\frac{\pi}{(1-\alpha)a^{2(\alpha-1)}}$ pentru $\alpha>1$ rezultă că şirul crescător $\left(\iint\limits_{D_n}\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{\alpha}}\right)_{n\in N}$ este mărginit superior deci este convergent.

Deci $\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\left(x^2+y^2+a^2\right)^{\alpha}}$ este convergentă şi cu criteriul comparației, rezultă conevrgența integralei date.

Să considerăm acum cazul unei funcții $f:D\setminus\{(x_0,y_0)\}\to\mathbb{R}$ unde $D\subset\mathbb{R}^2$ este un domeniu compact.

Izolăm punctul $M_0(x_0,y_0)$ cu ajutorul unei vecinătăți V (figura 15) şi considerăm mulțimea compactă $D\setminus V$. Presupunem că f este integrabilă pe orice compact de forma $D\setminus V$. Notăm cu $d(V)$ diametrul mulțimii V.



- Figura 15 -

<u>Definiție</u>:

Funcția <u>f</u> <u>este</u> <u>integrabilă</u> <u>impropriu</u> <u>pe</u> <u>D</u> dacă există un număr finit $I\in\mathbb{R}$ astfel încât pentru orice şir de vecinătăți $(V_n)_{n\in N}$ cu $V_n\supset V_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N})$ şi $\lim\limits_{n\to\infty}d(V_n)=0$ să avem:

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{D/V_n}f(x,y)dxdy=I \tag{7.9}$$

Numărul I se notează

$$I=\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy \tag{7.10}$$

şi se numeşte integrala improprie a funcției f pe domeniul D. De asemenea spunem că integrala improprie este convergentă.

Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite şi în acest caz.

Ne rezumăm doar la un exemplu.

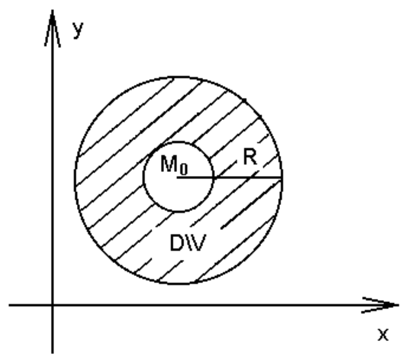
Să se arate că

$$\iint_D \frac{dxdy}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^\alpha} \tag{7.11}$$

unde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| (x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le R^2\right\}$ este convergentă pentru $\alpha\in(0,1)$.

În acest caz, $M_0=(x_0,y_0)$ şi considerăm şirul de vecinătăți $(V_n)_{n\in N}$ unde

$$V_n=\left\{(x,y)\in D \middle| (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\frac{1}{n^2}\right\} \tag{7.12}$$



- Figura 16 -

Atunci

$$\iint_{D-V_n} \frac{dx}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^\alpha}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{1}{n}}^{R}\frac{rdr}{r^{2\alpha}}==2\pi\frac{r^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\Bigg|_{\frac{1}{n}}^{R}=\frac{\pi}{1-\alpha}\left[R^{2-2\alpha}-\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\right]$$

dacă folosim schimbarea de variabilă:

$$\begin{cases} x-x_0=r\cos\theta & \theta\in[0,2\pi] \\ y-y_0=r\sin\theta & r\in[1/n,R] \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_{D-V_n} \frac{dx}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{\alpha}} = \frac{\pi}{1-\alpha}\lim_{n\to\infty}\left[R^{2-2\alpha}-\frac{1}{n^{2(1-\alpha)}}\right] = \frac{\pi R^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \quad \text{dacă}$$

$\alpha \in (0,1)$

Deci putem scrie că

$$\iint\limits_{D} \frac{dx}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]^{\alpha}} = \frac{\pi R^{2(1-\alpha)}}{1-\alpha} \quad \text{dacă } \alpha \in (0,1)$$

8.8. Integrale cu parametru

Fie dreptunghiul $D=[a,b]\times[c,d]\subset \mathbb{R}^2$, şi funcția $f : D \to \mathbb{R}$

Presumunem că pentru orice $y \in [c,d]$, funcția f este integrabilă pe $[a,b]$ în raport cu variabila x, deci există $\int_a^b f(x,y)dx$.

Notăm

$$\boxed{F(y)=\int_a^b f(x,y)dx} \tag{8.1}$$

unde $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ şi o numim integrală cu parametru.

În cele ce urmează, vom căuta să stabilim legătura care există între structura lui f şi structura lui F, mai precis, în ce fel şi în ce condiții proprietățile funcției f se transferă funcției F.

Teorema 1:

Dacă f este continuă pe D, atunci F este continuă pe $[c,d]$.

Demonstrație:

Din $f \in C^0(D)$ cu D - compact $\Rightarrow$ f este uniform continuă pe D $\overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon>0$, $(\exists)$ $\delta_\varepsilon>0$ astfel încât pentru orice (x',y') şi $(x'',y'')\in D$ cu $|x'-x''|<\delta_\varepsilon$ şi $|y'-y''|<\delta_\varepsilon$ să avem:

$$|f(x',y') - f(x'',y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.2}$$

În particular, pentru $x' = x'' = x$ şi orice $y', y'' \in [c,d]$ care verifică condiţia $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$, avem

$$|f(x,y') - f(x,y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.3}$$

Calculăm

$$|F(y') - F(y'')| = \left|\int_a^b [f(x,y') - f(x,y'')]dx\right| \le \int_a^b |f(x,y') - f(x,y'')|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

pentru $(\forall)$ $y', y'' \in [c,d]$ cu $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$.

Rezultă de aici continuitatea lui F pe $[c,d]$.

Teorema 2:

Dacă f şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe D, atunci funcţia F este derivabilă pe (c,d) şi are loc egalitatea

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \tag{8.4}$$

(8.4) este formula de derivare în raport cu parametrul a unei integrale cu parametru.

Demonstraţie:

Din $f \in C^0(D) \Rightarrow F \in C^0([c,d])$

Din $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^0(D)$ cu D compact $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ uniform continuă pe D $\overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice (x', y'), $(x'', y'') \in D$ cu $|x' - x''| < \delta_\varepsilon$ şi $|y' - y''| < \delta_\varepsilon$ să avem:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x',y') - \frac{\partial f}{\partial y}(x'',y'')\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.5}$$

În particular, pentru $x' = x'' = x$, $y' = y + h$ şi $y'' = y$ cu $h \in (0, \delta_\varepsilon)$ putem scrie

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{8.6}$$

Calculăm

$$\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h^*)dx$$

conform teoremei creşterilor finite, cu $h^* \in (o,h)$

Atunci

$$\left| \frac{F(y+h)-F(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \right| = \left| \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \right| \le$$

$$\le \int_a^b \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y+h^*) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon$$

Deducem că:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(y+h)-F(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx \text{ , deci } F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

<u>Teorema 3</u>:

Dacă f este continuă pe D, atunci

$$\int_c^d F(y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy \tag{8.7}$$

<u>Demonstraţie</u>:

Notăm:

$$\begin{cases} \Phi(z) = \int_a^b dx\int_c^z f(x,y)dy \\ \psi(z) = \int_c^z dy\int_a^b f(x,y)dx = \int_c^z F(y)dy \end{cases} \tag{8.8}$$

Totul revine la a arăta că $\Phi(d) = \psi(d)$. Principiul demonstraţiei va fi următorul: vom demonstra că Φ şi ψ sunt derivabile pe (c,d) şi

$\Phi'(z) = \psi'(z)$ pentru orice $z \in (c,d)$, de unde va rezulta că Φ şi ψ diferă printr-o funcție constantă. Apoi vom arăta că această constantă este nulă.

Din continuitatea lui f pe D rezultă, în baza teoremei 1, că funcția F definită de (8.1) este continuă pe $[c,d]$; de aici, în baza unei teoreme cunoscute din teoria integralei Riemann, rezultă că ψ este derivabilă pe (c,d) şi

$$\psi'(z) = \int_a^b f(x,z)dx \tag{8.9}$$

Să notăm

$$\varphi(x,z) = \int_c^z f(x,y)dy \tag{8.10}$$

Din continuitatea funcției f, rezultă că φ este derivabilă în raport cu z şi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = f(x,z) \tag{8.11}$$

deci, derivata este la rândul ei funcție continuă pe D. Dar atunci, în baza teoremei 2 şi ținând seama de definiția funcției Φ, rezultă că Φ este derivabilă pe (c,d) şi

$$\Phi'(z) = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,z)dx \tag{8.12}$$

deci $\Phi'(z) = \psi'(z)$ pentru orice $z \in (c,d)$. Rezulta că cele două funcții diferă printr-o constantă

$$\Phi(z) = \psi(x) + \lambda \quad (\forall)\ z \in [c,d] \tag{8.12}$$

Cum însă avem, evident, $\Phi(c) = \psi(c) = 0$, rezultă că $\lambda = 0$, deci $\Phi(z) = \psi(x)$ pentru orice $z \in [c,d]$. În particular, $\Phi(d) = \psi(d)$ şi teorema este complet demonstrată.

Până acum ne-am limitat la cazul în care parametrul y apărea numai în expresia funcției care se integrează. Acum vom considera integrala în care parametrul apare atât în funcția care se integrează cât şi la limitele de integrare.
Fie funcția $f : D = [a,b] \times [c,d]$ şi presupunem că ea este integrabilă în raport cu variabila x pe $[a,b]$ oricare ar fi $y = [c,d]$.
Fie funcțiile $\varphi, \psi : [c,d] \to [a,b]$

În aceste condiți, integrala

$$\boxed{F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx} \qquad (8.14)$$

are sens pentru orice $y\in[c,d]$.

Pentru integralele cu parametru (8.14) se pot demonstra următoarele:

<u>Teorema 4</u>:

Dacă f este continuă pe D iar funcțiile φ şi ψ sunt continue pe $[c,d]$, atunci funcția F definită de (8.14) este continuă pe $[c,d]$

<u>Teorema 5</u>:

Dacă f şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe D iar φ şi ψ sunt derivabile pe $[c,d]$, atunci funcția F dată de (8.14) este derivabilă pe $[c,d]$ şi are loc egalitatea

$$F'(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+\frac{d\psi}{dy}f[\psi(y),y]-\frac{d\varphi}{dy}f[\varphi(y),y] \qquad (8.15)$$

<u>Exemple:</u> --

1) Folosind formula de derivare în raport cu parametrul, să se calculeze următoarea integrală

$$\boxed{F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+y\cos x)}{\cos x}dx \;\text{ pentru } |y|<1} \qquad (8.16)$$

Prin derivare obținem:

$F'(y)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+y\cos x}=\frac{2}{1-y}\int_0^{\infty}\frac{dt}{\frac{1+y}{1-y}+t^2}$, dacă facem schimbarea de variabilă $tg\frac{x}{2}=t$.

$$F'(y)=\frac{2}{1-y}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

Prin integrare obținem:

$$F(y) = \pi \arcsin y + C \qquad (8.17)$$

Valoarea constantei arbitrare C se determină dând o valoare particulară variabilei y, anume $y = 0$. Din (8.16) şi (8.17) obținem $C = 0$.
Prin urmare,

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + y\cos x)}{\cos x} dx = \pi \arcsin y} \qquad (8.18)$$

2) Să se calculeze

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx} \qquad (8.19)$$

Pentru calculul acestei integrale, putem folosi integrala cu parametru

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{1 + x^2} dx \qquad (8.20)$$

$$F'(y) = \int_0^y \frac{x}{(1 + xy)(1 + x^2)} dx + \frac{\ln(1 + y^2)}{1 + y^2} = \frac{\ln(1 + y^2)}{2(1 + y^2)} + \frac{y \cdot \operatorname{arctg} y}{1 + y^2}$$

iar prin integrare obținem:

$$F(y) = \frac{1}{2}\int \frac{\ln(1 + y^2)}{(1 + y^2)} dy + \int \frac{y \cdot \operatorname{arctg} y}{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \cdot \ln(1 + y^2) + C$$

Pentru $y = 0$ obținem $C = 0$, astfel că:

$$\int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \cdot \ln(1 + y^2) \qquad (8.21)$$

iar pentru $y = 1$, obținem

$$\boxed{I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2} \qquad (8.22)$$

3) Să se calculeze următoarea integrală, folosind integrarea în raport cu parametrul

$$\boxed{I = \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx}, \ a, b > 0 \qquad (8.23)$$

Putem scrie că:

$$I=\int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left[\int_a^b x^y dy\right]dx=\int_a^b\left[\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\right]dy \tag{8.24}$$

Am putut aplica torema prin care se poate integra o integrală cu parametru deoarece funcția

$$f(x,y)=\begin{cases} x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right) & (x,y)\in(o,1]\times[a,b) \\ 0 & x=0 \end{cases} \tag{8.25}$$

este continuă pe $[0,1]\times[a,b]$.

Calculăm:

$$I_1=\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

făcând schimbarea de variabilă $\ln x=t$, $t\in(-\infty,0)$.

$$I_1=\int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)}\cos t dt=e^{t(y+1)}\sin t\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 (y+1)e^{t(y+1)}\sin t dt=$$

$$=-(y-1)\left[e^{t(y+1)}\cos t\Big|_{-\infty}^0+(y+1)\int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)}\cos t dt\right]=y+1-(y+1)^2 I_1$$

Obținem: $I_1=\dfrac{y+1}{1+(y+1)^2}$ deci

$$I=\int_a^b\frac{y+1}{1+(y+1)^2}dy=\frac{1}{2}\ln\left[\left(1+y^2\right)+1\right]_a^b=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}$$

Teoria integralelor cu parametru poate fi extinsă şi pentru cazul intervalelor necompacte.

Fie $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$, unde $[a,b)$ este un interval necompact, cu b - finit sau infinit. Presupunem că pentru orice $y\in[c,d]$ integrala

$$F(y)=\int_a^{b-0} f(x,y)dx \tag{8.26}$$

este convergentă.

Integrala (8.26) se numeşte integrală improprie cu parametru.

În continuare, vom da condiții de continuitate şi derivabilitate pentru funcția F. Pentru a da aceste condiții, introducem noțiunea de integrală uniform convergentă:

Definiție:

Integrala (8.26) *converge uniform în raport cu parametrul* $y \in [c,d]$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr b_ε, $a < b_\varepsilon < b$, astfel încât pentru orice u, cu $b_\varepsilon < u < b$ să avem

$$\left| \int_a^u f(x,y)dx - F(y) \right| < \varepsilon \tag{8.27}$$

pentru orice $y \in [c,d]$

Teorema 6:

Fie $f:[a,b)\times[c,d]$ unde b - finit sau infinit

Dacă f este continuă pe $[a,b)\times[c,d]$, iar integrala $F(y)=\int_a^{b-0} f(x,y)dx$ converge uniform în raport cu parametrul $y \in [c,d]$, atunci F este continuă pe $[c,d]$

Teorema 7:

Dacă: a) f şi $\frac{\partial f}{\partial y}$ sunt continue pe $[a,b)\times[c,d]$

b) $F(y)=\int_a^{b-0} f(x,y)dx$ este convergentă

c) $\int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ converge uniform în raport cu $y \in [c,d]$

Atunci: F este derivabilă pe (c,d) şi are loc egalitatea

$$F'(y)=\int_a^{b-0} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$

<u>Teorema 8</u>:
Dacă: a) f continuă pe $[a,b)\times[c,d]$

b) $F(y)=\int_a^{b-0} f(x,y)dx$ converge uniform în raport cu $y\in[c,d]$

Atunci: a) $\int_a^{b-0} dx\int_c^d f(x,y)dy$ este convergentă

b) $\int_a^{b-0} dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^{b-0} f(x,y)dx=\int_c^d F(y)dy$

Enunțăm un criteriu de convergență uniformă pentru integralele improprii cu parametru.

<u>Criteriul lui Weierstrass</u>
Fie funcțiile $f:[a,b)\times[c,d]\to\mathbb{R}$ şi $g:[a,b)\to\mathbb{R}^+$
Dacă: a) $|f(x,y)|\le g(x)$ $(\forall)$ $x\in[a,b)$ şi $(\forall)$ $y\in[c,d]$

b) $F(u,y)=\int_a^u f(x,y)dx$ există pentru $(\forall)$ $u\in[a,b)$ şi $(\forall)$ $y\in[c,d]$

c) $\int_a^{b-0} g(x)dx$ este convergentă

Atunci: $F(x)=\int_a^{b-0} f(x,y)dx$ converge uniform în raport cu parametrul $y\in[c,d]$.

<u>Exemplu:</u> ---

Să se determine funcția F definită prin

$$F(y)=\int_0^\infty e^{-xy}\frac{\sin^3 x}{x}dx \tag{8.28}$$

şi apoi să se deducă valoarea integralei

$$I=\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx \tag{8.29}$$

Se arată că integrala dată, ca şi integrala obţinută prin derivare sub semnul integralei,

$$-\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin^3 x dx \tag{8.30}$$

sunt uniform convergente pentru $y \geq 0$. De aici rezultă, în primul rând, că $I = F(0)$ şi apoi că

$$F'(y) = -\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin^3 x dx = \frac{1}{4}\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin 3x dx - \frac{3}{4}\int_0^{\infty} e^{-xy}\sin x dx =$$

$$= \frac{3}{4}\frac{e^{-xy}(y\sin x + \cos x)}{1+y^2}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{4}\frac{e^{-xy}\left(y\sin^3 3x + \cos 3x\right)}{9+y^2}\Bigg|_0^{\infty}$$

de unde

$$F'(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9+y^2} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{1+y^2}$$

şi prin integrare obţinem:

$$F(x) = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg} y + C$$

cum $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) = 0$, deducem $C = \dfrac{\pi}{3}$ şi obţinem

$$F(y) = \frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{y}{3} - \frac{3}{4}\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{3} \tag{8.31}$$

şi

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x}dx = \frac{\pi}{3} \tag{8.32}$$

8.9. Integralele lui Euler

Acestea sunt un exemplu de integrale improprii cu parametru.

Integrala lui Euler de prima speță, sau funcție $B(p,q)$, este o integrală improprie cu doi parametri definită prin egalitatea

$$\boxed{B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx} \qquad (9.1)$$

convergentă pentru $p>0$ şi $q>0$.

Într-adevăr, dacă descompunem integrala (9.1),

$$B(p,q)=\int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=I_1+I_2$$

se observă cu uşurință că I_1 este convergentă pentru $p>0$ deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{\alpha}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1 \text{ dacă } \alpha=1-p<1$$

iar I_2 este convergentă pentru $q>0$ deoarece

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(1-x)^{\alpha}x^{p-1}(1-x)^{q-1}=1 \text{ dacă } \alpha=1-q<1$$

Dacă în (9.1) facem schimbarea de variabilă $x=1-t$, se obține:

$$\boxed{B(p,q)=B(q,p)} \qquad (9.2)$$

adică funcția $B(p,q)$ este simetrică în cele două variabile.

Integrala lui Euler de a doua speță, sau funcție $\Gamma(p)$, este o integrală improprie cu un parametru definită prin egalitatea

$$\boxed{\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx} \qquad (9.3)$$

convergentă pentru $p>0$.
Folosind descompunerea

$$\Gamma(p)=\int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int_1^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=I_1+I_2$$

se observă cu uşurință că I_1 este convergentă pentru $p>0$ deoarece

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^{\alpha} x^{p-1} e^{-x} = 1$ dacă $\alpha = 1 - p < 1$

iar I_2 este convergentă pentru $p > 0$ folosind criteriul comparației precum şi inegalitatea

$e^{-x} < \dfrac{1}{x^{p+1}}$ pentru $x \in [1, +\infty)$ şi $p > 0$

Să calculăm integrala $\Gamma(p+1)$ făcând o integrare prin părți.

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = -x^p e^{-x}\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = p\Gamma(p)$$

Obținem realția de recurență

$$\boxed{\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)} \tag{9.4}$$

În particular, dacă $p = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ obținem:

$$\boxed{\Gamma(n+1) = n!} \tag{9.5}$$

Folosind teoremele pe care le-am menționat pentru integralele improprii cu parametru, se poate stabili o legătură simplă între funcțiile $\Gamma(p)$ şi $B(p,q)$.

În (9.3) facem schimbarea de variabilă

$$x = ty, \text{ unde } t > 0 \tag{9.6}$$

şi obținem

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx = t^{-p} \int_0^\infty y^{p-1} e^{-ty} dy \tag{9.7}$$

În (9.7) înlocuim p cu p+q (pentru $q > 0$) şi pe t cu 1+t. Vom obține:

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^\infty y^{p+q-1} e^{-(1+t)y} dy \tag{9.8}$$

Înmulțind ambii membri cu t^{p-1} şi integrând, în raport cu t, pe intervalul $(0, \infty)$, obținem

$$\Gamma(p+q)\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^{\infty}t^{p-1}\left[\int_0^{\infty}y^{p+q-1}e^{-(1+t)y}dy\right]dt=$$

$$=\int_0^{\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\left[\int_0^{\infty}t^{p-1}e^{-ty}dt\right]dy=\int_0^{\infty}y^{p+q-1}e^{-y}\frac{\Gamma(p)}{y^p}dy=$$

$$=\Gamma(p)\int_0^{\infty}y^{q-1}e^{-y}dy=\Gamma(p)\Gamma(q)$$

Cum $\int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}dt=\int_0^{\infty}u^{p-1}(1-u)^{q-1}du=B(p,q)$ dacă facem schimbarea de variabilă $t=\frac{1}{u}$, reținem că:

$$\boxed{B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}} \tag{9.9}$$

În (9.9) considerăm $p=q=\frac{1}{2}$ şi obținem $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(1)}$.

Cum $\Gamma(1)=\int_0^{\infty}e^{-x}dx=1$, avem

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int_0^{2/\pi}\frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}dt=\pi$$

dacă facem schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$. Astfel obținem:

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}} \tag{9.10}$$

Pentru funcțiile $B(p,q)$ şi $\Gamma(p)$ se mai pot demonstra următoarele relații:

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\theta \tag{9.11}$$

$$B(p+1,q)=\frac{p}{p+q}B(p,q) \tag{9.12}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{9.13}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{n!},\ n\in\mathbb{N} \tag{9.14}$$

Cu ajutorul integralelor lui Euler, se pot calcula cu uşurinţă unele integrale improprii

Exemple: ---

1) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{1}{2}}(\cos\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta\overset{(9.11)}{=}\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}$$

$$=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)\overset{(9.13)}{=}\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

2) $$I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{3}\int_0^1 t^{-\frac{2}{3}}(1-t)^{-\frac{1}{3}}dt$$

dacă se face schimbarea de variabilă $t=x^3$. Rezultă că

$$I=\frac{1}{3}B\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3) $$I=\int_{-1}^1\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}dx=2\int_0^1 t^{1/2}(1-t)^{-1/2}dt$$

dacă facem schimbarea $x=2t-1$.

$$I=2B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=2\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=2\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=\pi$$

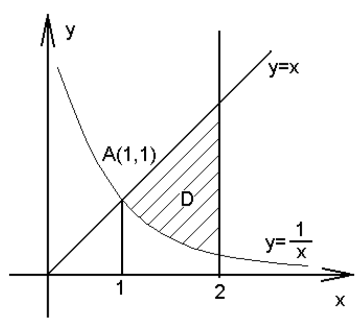
4) $I=\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}dx=\int_0^{\infty}x^{1/4}(1+x)^{-2}dx=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}=$

$=\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1+1)}=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

-- 📖

8.10. Exerciții rezolvate

1) Să se calculeze masa unei plăci de densitate $\rho(x,y)=\frac{x^2}{y^2}$ care ocupă în $\mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de hiperbola de ecuație $y=\frac{1}{x}$ şi dreapta $y=x$ pentru $x\in[1,2]$.



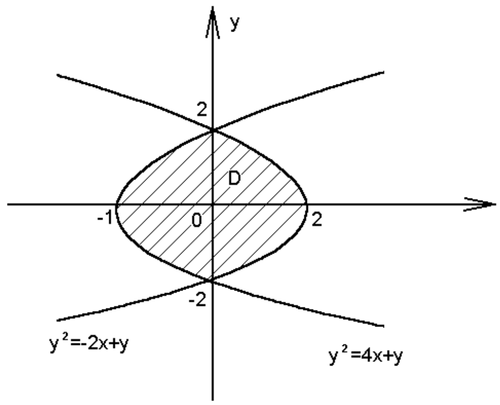
Se vede că D este un domeniu simplu în raport cu axa OY definit de:

$$D:\begin{cases}x\in[1,2]\\ y\in\left[\frac{1}{x},x\right]\end{cases}\tag{10.1}$$

Masa plăcii se calculează cu integrala dublă

$$M=\iint_D\rho(x,y)dxdy=\iint_D\frac{x^2}{y^2}dxdy=\int_1^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx=\frac{9}{4}$$

2) Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru o placă omogentă mărginită de parabolele de ecuații $y^2 = 4x + 4$ şi $y^2 = -2x + 4$.



D este un domeniu simplu față de axa OX şi este dat de reprezentarea

$$D: \begin{cases} y \in [-2,2] \\ x \in [\frac{y^2-4}{4}, \frac{4-y^2}{2}] \end{cases} \qquad (10.2)$$

Fiind o placă omogenă, $\rho(x,y)$ - constant şi coodonatele sunt date de:

$$x_g = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D dx dy} \; ; \; y_g = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D dx dy} \qquad (10.3)$$

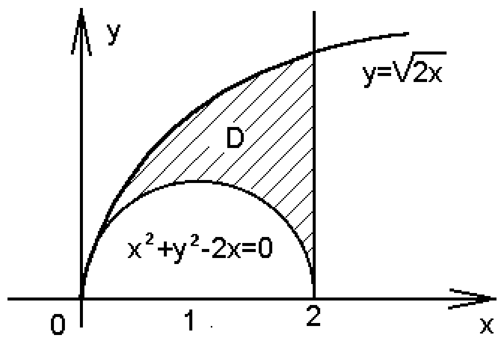
De asemenea, putem face observația că această placă omogenă este simetrică față de axa OX, prin urmare $y_g = 0$, rezultat care se poate obține şi prin calcul direct.

$$\iint\limits_D dx dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = \int_{-2}^{2}\left(3 - \frac{3}{4}y^2\right)dy = 8$$

$$\iint\limits_D x dx dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} x dx = \frac{3}{32}\int_{-2}^{2}\left(y^4 - 8y^2 + 16\right)dy = \frac{8}{5}$$

Prin urmare obținem: $\begin{cases} x_g = \dfrac{1}{5} \\ y_g = 0 \end{cases}$

3) Să se calculeze momentul de inerție față de axa OX a unei plăci de densitate $\rho(x,y) = |y|$, care ocupă în $\mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$, arcul de parabolă $y = \sqrt{2x}$ şi dreapta $x = 2$.



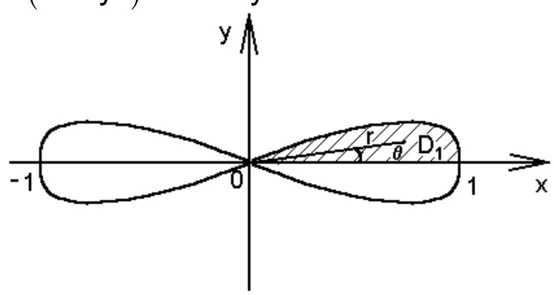
Domeniul D ocupat de placă este simplu față de axa OY, fiind dat de reprezentarea:

$$D: \begin{cases} x \in [0,2] \\ y \in \left[\sqrt{2x - x^2}, \sqrt{2x}\right] \end{cases} \tag{10.4}$$

$$I_{0X} = \iint_D y^2 \rho(x,y) dxdy = \iint_D y^3 dxdy = \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} y^3 dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 \left[4x^2 - \left(2x - x^2\right)^2\right] dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \left(4x^3 - x^4\right) dx = \frac{12}{5}$$

4) Să se calculeze aria domeniului delimitat de lemniscata lui Bernoulli dată de ecuația $\left(x^2 + y^2\right)^2 = x^2 - y^2$



Domeniul fiind simetric față de ambele axe de coordonate, aria este egală cu de patru ori aria unei jumătăți de buclă.

$$A=\iint_{D} dxdy = 4\iint_{D_1} dxdy \qquad (10.5)$$

Dacă folosim coordonatele polare (r, θ), coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct din domeniu au expresiile $x = r\cos\theta$ şi $y = r\sin\theta$. Astfel că ecuația lemniscatei în coordonate polare este:

$$r=\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \qquad (10.6)$$

Din condiția de existență a radicalului, deducem:

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta \ge 0 \;\Rightarrow\; \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

Integrala (10.5) o vom calcula cu ajutorul coordonatelor polare, domeniul D_1 având în aceste coordonate următoarea reprezentare

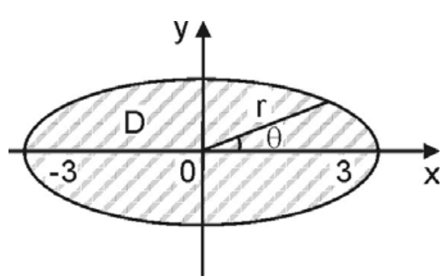
$$D_1:\begin{cases} x = r\cos\theta & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ y = r\sin\theta & r\in\left[0,\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\right] \end{cases} \qquad (10.7)$$

$$A = 4\iint_{D_1} dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} rdr = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

5) Să se determine masa plăcii de densitate $\rho(x,y) = x^2 + y^2$ care ocupă în $\mathbb{R}^2$ domeniul delimitat de elipsa

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



Masa plăcii o calculăm cu formula

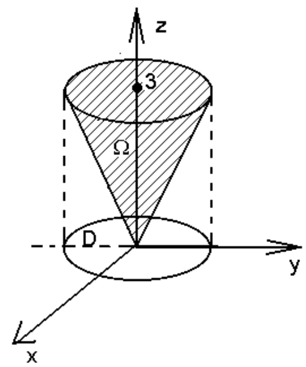
$$M=\iint_D \rho(x,y)dxdy=\iint_D (x^2+y^2)dxdy \tag{10.8}$$

Integrala (10.8) o vom calcula folosind coordonatele polare generalizate, astfel că putem scrie:

$$D:\begin{cases} x=3r\cos\theta & \theta\in[0,2\pi] \\ y=2r\sin\theta & r\in[0,1] \end{cases} \tag{10.9}$$

$$M=\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 6rdr=3\int_0^{2\pi}d\theta=6\pi$$

6) Să se determine momentul de inerție față de planul (XOY) pentru un corp omogen care ocupă în $\mathbb{R}^3$ un domeniu delimitat de conul de ecuație $z^2=x^2+y^2$ şi planul $z=3$. (pentru $z\geq 0$)

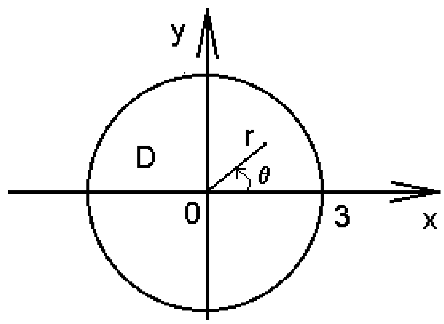


Domeniul $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa OZ, el putând fi dat de reprezentarea:

$$\Omega:\begin{cases} (x,y)\in D \\ z\in\left[\sqrt{x^2+y^2},3\right] \end{cases} \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} I_{XOY}&=\rho\iiint_\Omega z^2dxdydz=\rho\iint_D dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3}z^2dz= \\ &=\frac{\rho}{3}\iint_D\left[27-(x^2+y^2)^{3/2}\right]dxdy \end{aligned} \tag{10.11}$$

Planul $z=3$ intersectează conul $z^2=x^2+y^2$ după cercul $x^2+y^2=9$ care se proiectează în planul (XOY) în adevărata mărime. Acest cerc delimitează domeniul D.

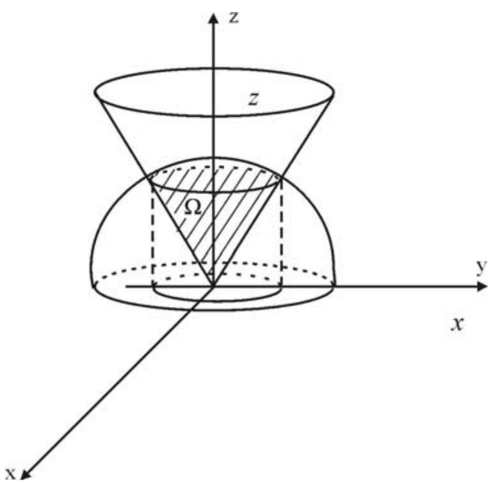


Pentru calculul integralei (10.11) folosim coordonatele polare

$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta & r\in[0,3] \\ y = r\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases} \tag{10.12}$$

$$I_{XOY} = \frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \left(27 - r^3\right) r dr = \frac{243\pi\rho}{5}$$

7) Să se calculeze masa corpului de densitate $\rho(x,y,z) = |z|$ care ocupă în $\mathbb{R}^3$ domeniul delimitat de sfera de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ şi conul $z^2 = x^2 + y^2$, pentru $z \geq 0$.



Intersecția dintre sferă şi con se obține prin eliminarea lui z din sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

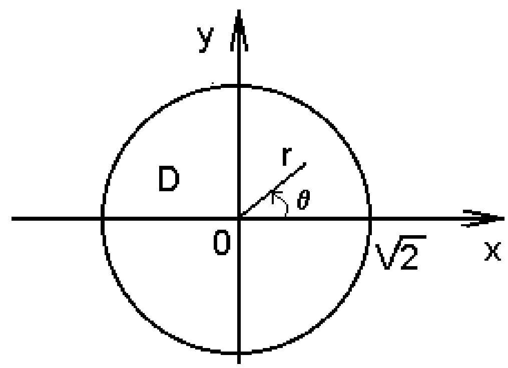
Se obține cercul $x^2 + y^2 = 2$ care se proiectează în planul (XOY) în adevărata lui mărime. Aceasta delimitează compactul $D \subset \mathbb{R}^2$.

Domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa OZ el putând fi reprezentat prin

$$\Omega : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z \in \left[\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}\right] \end{cases} \tag{10.13}$$

Atunci masa corpului se calculează:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega zdxdydz = \\ &= \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \iint_D \left(2-x^2-y^2\right)dxdy \end{aligned} \tag{10.14}$$



Integrala (10.14) se poate calcula folosind coordonatele polare:

$$D : \begin{cases} x = r\cos\theta & r \in \left[0, \sqrt{2}\right] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{10.15}$$

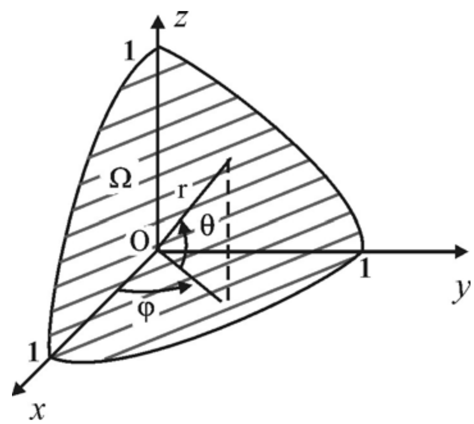
Atunci:

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(2-r^2\right)dr = 2\pi\left(2r - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

8) Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_\Omega xyzdxdydz$$

unde Ω este un domeniu din $\mathbb{R}^3$ delimitat de sfera $x^2+y^2+z^2=1$ şi plane de coordonate $x=0$, $y=0$, $z=0$ (pentru $x,y,z \geq 0$)



Această integrală se poate calcula folosind coordonatele sferice:

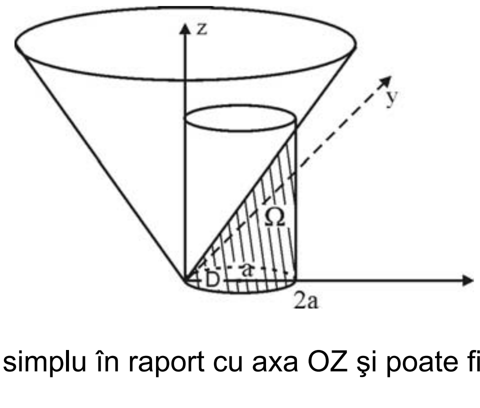
$$\Omega:\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi & r \in [0,1] \\ y = r\cos\theta\sin\varphi & \theta \in [0,\pi/2] \\ z = r\sin\theta & \varphi \in [0,\pi/2] \end{cases} \tag{10.16}$$

$$I = \iiint_{\Omega} xyzdxdydz = \int_0^1 r^5 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{r^6}{6}\Bigg|_0^1 \left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

9) Să se calculeze volumul corpului delimitat de cilindrul $x^2 + y^2 = 2ax$, conul $x^2 + y^2 = z^2$ şi planul $z = 0$ (pentru $z \geq 0$)

Cilindrul are generatoarea paralelă cu axa OZ, iar secțiunea lui este cercul $x^2 + y^2 = 2ax$ sau, dacă punem ecuația sub formă canonică, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.



Domeniul Ω este simplu în raport cu axa OZ şi poate fi reprezentat prin

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z\in\left[0,\sqrt{x^2+y^2}\right]\end{cases}$$

$$V=\iiint_\Omega dxdydz=\iint_\Omega dxdy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dz=\iint_\Omega\sqrt{x^2+y^2}dxdy \qquad (10.17)$$

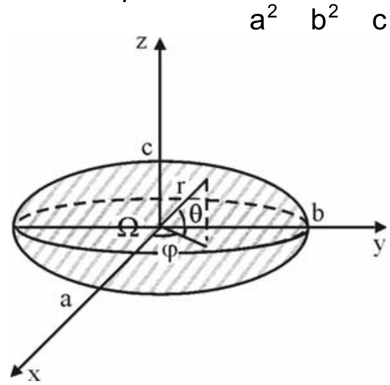
Integrala (4.17) se poate calcula folosind coordonatele polare:

$$D:\begin{cases}x=r\cos\theta & r\in[0,2a\cos\theta]\\ y=r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\end{cases} \qquad (10.16)$$

$$V=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(1-\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{32a^3}{9}$$

10) Să se calculeze volumul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

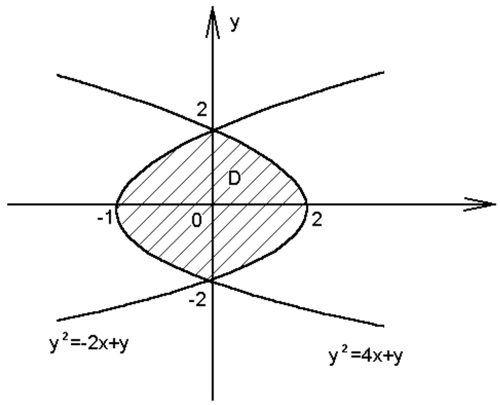


Folosim coordonatele sferice generalizate:

$$\Omega:\begin{cases}x=ar\cos\theta\cos\varphi & r\in[0,1]\\ y=br\cos\theta\sin\varphi & \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\\ z=cr\sin\theta & \varphi\in[0,2\pi]\end{cases} \qquad (10.19)$$

$$V=\iiint_\Omega dxdydz=abc\int_0^1 r^2dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{3}abc$$

2) Să se determine coordonatele centrului de greutate pentru o placă omogentă mărginită de parabolele de ecuații $y^2 = 4x + 4$ şi $y^2 = -2x + 4$.



D este un domeniu simplu față de axa OX şi este dat de reprezentarea

$$D : \begin{cases} y \in [-2,2] \\ x \in [\frac{y^2-4}{4}, \frac{4-y^2}{2}] \end{cases} \tag{10.2}$$

Fiind o placă omogenă, $\rho(x,y)$ - constant şi coodonatele sunt date de:

$$x_g = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy} \ ; \ y_g = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{\iint\limits_D dxdy} \tag{10.3}$$

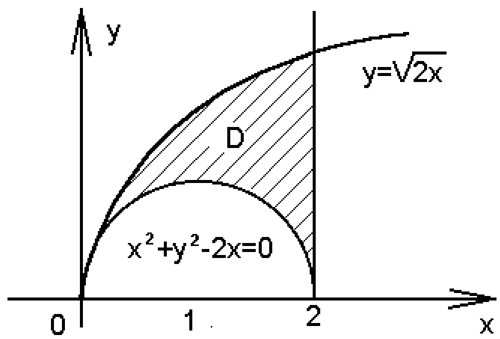
De asemenea, putem face observația că această placă omogenă este simetrică față de axa OX, prin urmare $y_g = 0$, rezultat care se poate obține şi prin calcul direct.

$$\iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy = \int_{-2}^{2} \left(3 - \frac{3}{4} y^2\right) dy = 8$$

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} xdx = \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} \left(y^4 - 8y^2 + 16\right) dy = \frac{8}{5}$$

Prin urmare obținem: $\begin{cases} x_g = \dfrac{1}{5} \\ y_g = 0 \end{cases}$

3) Să se calculeze momentul de inerție față de axa OX a unei plăci de densitate $\rho(x,y)=|y|$, care ocupă în $\mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de cercul $x^2+y^2-2x=0$, arcul de parabolă $y=\sqrt{2x}$ şi dreapta $x=2$.



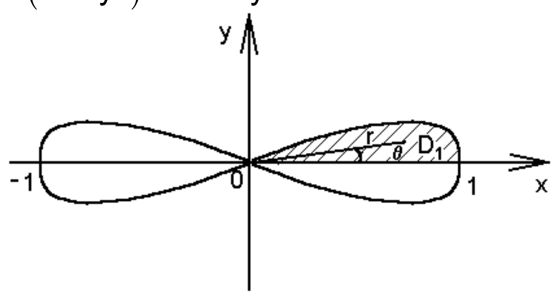
Domeniul D ocupat de placă este simplu față de axa OY, fiind dat de reprezentarea:

$$D:\begin{cases} x\in[0,2] \\ y\in\left[\sqrt{2x-x^2},\sqrt{2x}\right] \end{cases} \tag{10.4}$$

$$I_{0X}=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy=\iint_D y^3dxdy=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} y^3dy=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2\left[4x^2-\left(2x-x^2\right)^2\right]dx=\frac{1}{4}\int_0^2\left(4x^3-x^4\right)dx=\frac{12}{5}$$

4) Să se calculeze aria domeniului delimitat de lemniscata lui Bernoulli dată de ecuația $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2$



Domeniul fiind simetric față de ambele axe de coordonate, aria este egală cu de patru ori aria unei jumătăți de buclă.

$$A=\iint_D dxdy = 4\iint_{D_1} dxdy \tag{10.5}$$

Dacă folosim coordonatele polare (r, θ), coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct din domeniu au expresiile $x=r\cos\theta$ şi $y=r\sin\theta$. Astfel că ecuația lemniscatei în coordonate polare este:

$$r=\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta} \tag{10.6}$$

Din condiția de existență a radicalului, deducem:

$$\cos^2\theta-\sin^2\theta\ge 0 \Rightarrow \theta\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$$

Integrala (10.5) o vom calcula cu ajutorul coordonatelor polare, domeniul D_1 având în aceste coordonate următoarea reprezentare

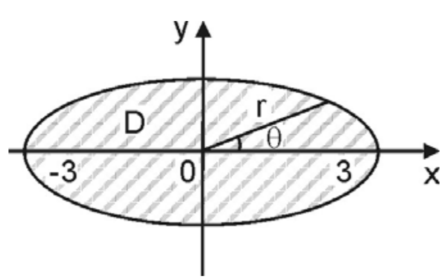
$$D_1:\begin{cases} x=r\cos\theta & \theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right] \\ y=r\sin\theta & r\in\left[0,\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}\right] \end{cases} \tag{10.7}$$

$$A=4\iint_{D_1} dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}} rdr = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)d\theta =$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta = \sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

5) Să se determine masa plăcii de densitate $\rho(x,y)=x^2+y^2$ care ocupă în $\mathbb{R}^2$ domeniul delimitat de elipsa

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$



Masa plăcii o calculăm cu formula

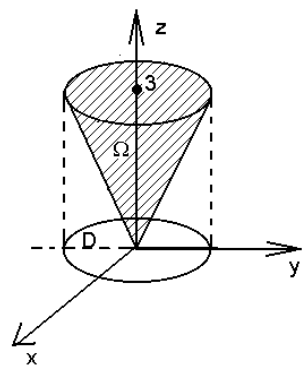
$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy \tag{10.8}$$

Integrala (10.8) o vom calcula folosind coordonatele polare generalizate, astfel că putem scrie:

$$D:\begin{cases} x = 3r\cos\theta & \theta \in [0,2\pi] \\ y = 2r\sin\theta & r \in [0,1] \end{cases} \tag{10.9}$$

$$M = \iint_D \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 6r\,dr = 3\int_0^{2\pi} d\theta = 6\pi$$

6) Să se determine momentul de inerție față de planul (XOY) pentru un corp omogen care ocupă în $\mathbb{R}^3$ un domeniu delimitat de conul de ecuație $z^2 = x^2 + y^2$ şi planul $z = 3$. (pentru $z \geq 0$)

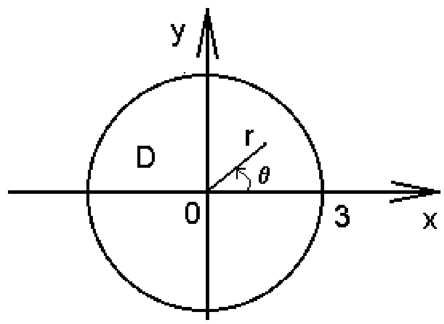


Domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa OZ, el putând fi dat de reprezentarea:

$$\Omega:\begin{cases} (x,y) \in D \\ z \in \left[\sqrt{x^2 + y^2}, 3\right] \end{cases} \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned} I_{XOY} &= \rho\iiint_\Omega z^2\,dxdydz = \rho\iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z^2 dz = \\ &= \frac{\rho}{3}\iint_D \left[27 - \left(x^2 + y^2\right)^{3/2}\right]dxdy \end{aligned} \tag{10.11}$$

Planul $z = 3$ intersectează conul $z^2 = x^2 + y^2$ după cercul $x^2 + y^2 = 9$ care se proiectează în planul (XOY) în adevărata mărime. Acest cerc delimitează domeniul D.

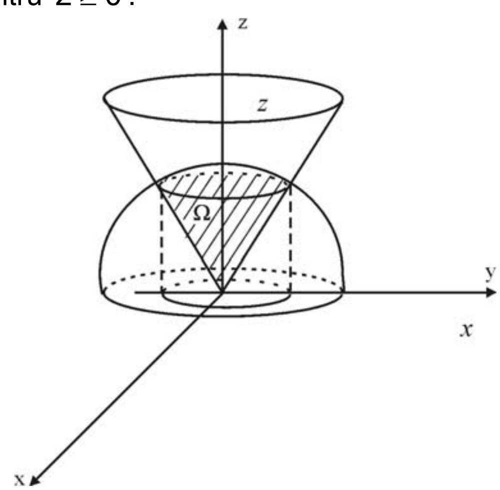


Pentru calculul integralei (10.11) folosim coordonatele polare

$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,3] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{cases} \qquad (10.12)$$

$$I_{XOY} = \frac{\rho}{3}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \left(27 - r^3\right) r dr = \frac{243\pi\rho}{5}$$

7) Să se calculeze masa corpului de densitate $\rho(x,y,z) = |z|$ care ocupă în $\mathbb{R}^3$ domeniul delimitat de sfera de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ şi conul $z^2 = x^2 + y^2$, pentru $z \geq 0$.



Intersecția dintre sferă şi con se obține prin eliminarea lui z din sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

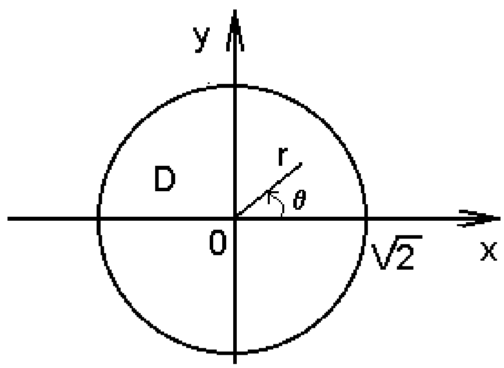
Se obține cercul $x^2 + y^2 = 2$ care se proiectează în planul (XOY) în adevărata lui mărime. Aceasta delimitează compactul $D \subset \mathbb{R}^2$.

Domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este simplu în raport cu axa OZ el putând fi reprezentat prin

$$\Omega : \begin{cases} (x,y) \in D \\ z \in \left[\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{4-x^2-y^2}\right] \end{cases} \tag{10.13}$$

Atunci masa corpului se calculează:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \rho(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Omega zdxdydz = \\ &= \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \iint_D \left(2-x^2-y^2\right)dxdy \end{aligned} \tag{10.14}$$



Integrala (10.14) se poate calcula folosind coordonatele polare:

$$D : \begin{cases} x = r\cos\theta & r \in \left[0, \sqrt{2}\right] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \tag{10.15}$$

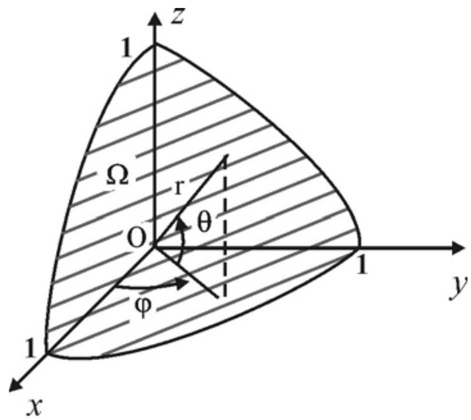
Atunci:

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left(2-r^2\right)dr = 2\pi\left(2r - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

8) Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_\Omega xyzdxdydz$$

unde Ω este un domeniu din $\mathbb{R}^3$ delimitat de sfera $x^2+y^2+z^2=1$ şi plane de coordonate $x=0$, $y=0$, $z=0$ (pentru $x,y,z \geq 0$)



Această integrală se poate calcula folosind coordonatele sferice:

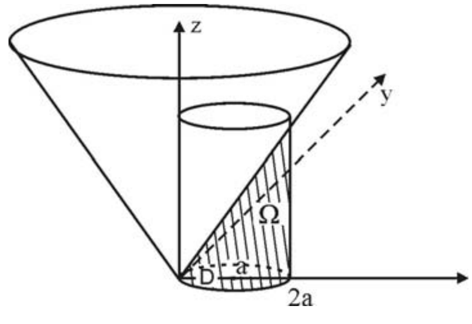
$$\Omega:\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi & r\in[0,1] \\ y = r\cos\theta\sin\varphi & \theta\in[0,\pi/2] \\ z = r\sin\theta & \varphi\in[0,\pi/2] \end{cases} \qquad (10.16)$$

$$I = \iiint_{\Omega} xyz\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 r^5 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\sin\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left.\frac{r^6}{6}\right|_0^1 \left.\left(-\frac{\cos^4\theta}{4}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

9) Să se calculeze volumul corpului delimitat de cilindrul $x^2 + y^2 = 2ax$, conul $x^2 + y^2 = z^2$ şi planul $z = 0$ (pentru $z \geq 0$)

Cilindrul are generatoarea paralelă cu axa OZ, iar secțiunea lui este cercul $x^2 + y^2 = 2ax$ sau, dacă punem ecuația sub formă canonică, $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.



Domeniul Ω este simplu în raport cu axa OZ şi poate fi reprezentat prin

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D\\ z\in\left[0,\sqrt{x^2+y^2}\right]\end{cases}$$

$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz=\iint_{\Omega}dxdy\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}dz=\iint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dxdy \tag{10.17}$$

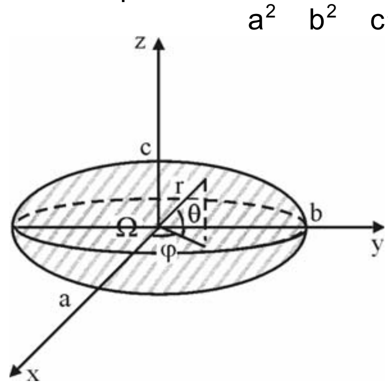
Integrala (4.17) se poate calcula folosind coordonatele polare:

$$D:\begin{cases}x=r\cos\theta & r\in[0,2a\cos\theta]\\ y=r\sin\theta & \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\end{cases} \tag{10.16}$$

$$V=\iint_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr=$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta=\frac{16a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left(1-\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{32a^3}{9}$$

10) Să se calculeze volumul elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Folosim coordonatele sferice generalizate:

$$\Omega:\begin{cases}x=ar\cos\theta\cos\varphi & r\in[0,1]\\ y=br\cos\theta\sin\varphi & \theta\in[-\pi/2,\pi/2]\\ z=cr\sin\theta & \varphi\in[0,2\pi]\end{cases} \tag{10.19}$$

$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz=abc\int_0^1 r^2dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi}{3}abc$$

CAPITOLUL IX

INTEGRALA CURBILINIE

9.1. Integrala Stieltjes

Fie intervalul $[a,b] \subset \mathbb{R}$, o diviziune a acestuia, $\Delta = (a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b)$ şi punctele arbitrar alese, $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,n}$.

Fie, de asemenea, funcţiile f şi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, f mărginită şi g crescătoare pe $[a,b]$.

Definim suma

$$\boxed{\sigma_\Delta(f, g, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(t_k) - g(t_{k-1})]} \qquad (1.1)$$

pe care o numim <u>*sumă Riemann-Stieltjes*</u>.

<u>Definiţie</u>:

Funcţia f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe [a,b], dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ să avem:

$$|\sigma_\Delta(f, g, \xi_k) - I| < \varepsilon \qquad (1.2)$$

Numărul I se notează:

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dg(x)} \qquad (1.3)$$

şi se <u>numeşte Integrala Stieltjes a funcţiei f în raport cu g pe [a,b]</u>.

Funcţia f fiind mărginită pe [a,b], notăm

$$\begin{cases} m_k = \inf\limits_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x) \\ M_k = \sup\limits_{x \in [t_{k-1}, t_k]} f(x) \end{cases} \qquad (1.4)$$

şi formăm <u>sumele Darboux-Stieltjes</u> (inferioară şi superioară)

$$s_\Delta(f,g)=\sum_{k=1}^{n} m_k\left[g(t_k)-g(t_{k-1})\right]$$
$$S_\Delta(f,g)=\sum_{k=1}^{n} M_k\left[g(t_k)-g(t_{k-1})\right] \qquad (1.5)$$

<u>Observații</u>:---

1) În particular, dacă funcția crescătoare g este $g(x)=x$, atunci sumele (1.1) şi (1.5) sunt sumele Riemann şi Darboux ataşate funcției f.

2) Pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ avem:

$$s_\Delta(f,g)\le \sigma_\Delta(f,g,\xi_k)\le S_\Delta(f,g) \qquad (1.6)$$

<u>Definiție</u>:

Spunem că diviziunea $\Delta^* \in \mathcal{D}([a,b])$ este mai fină decât diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, dacă toate punctele lui Δ sunt şi în Δ^*. Notăm $\Delta \subset \Delta^*$

<u>Propoziție</u>:

Dacă $\Delta \subset \Delta^*$, atunci între sumele Darboux-Stieltjes corespunzătoare are loc relația:

$$s_\Delta(f,g)\le s_{\Delta^*}(f,g)\le S_{\Delta^*}(f,g)\le S_\Delta(f,g) \qquad (1.7)$$

<u>Demonstrație</u>:

Presupunem că diviziunea Δ^* are un singur punct în plus față de Δ.

$\Delta=(a=t_0<t_1<...<t_{k-1}<t_k<...<t_n=b)$

$\Delta^*=(a=t_0<t_1<...<t_{k-1}<u<t_k<...<t_n=b)$

Calculăm:

$$s_{\Delta^*}(f,g)-s_\Delta(f,g)=\inf_{x\in[t_{k-1},u]} f(x)[g(u)-g(t_{k-1})]+$$
$$+\inf_{x\in[u,t_k]} f(x)[g(t_k)-g(u)]-\inf_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)[g(t_k)-g(t_{k-1})]=$$

$$= \inf_{x\in[t_{k-1},u]} f(x)[g(u)-g(t_{k-1})] + \inf_{x\in[u,t_k]} f(x)[g(t_k)-g(u)] -$$
$$- \inf_{x\in[t_{k-1},k]} f(x)[g(t_k)-g(u)+g(u)-g(t_{k-1})] =$$
$$= [g(u)-g(t_{k-1})]\left[\inf_{x\in[t_{k-1},u]} f(x) - \inf_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)\right] +$$
$$+ [g(t_k)-g(u)]\left[\inf_{x\in[u,t_k]} f(x) - \inf_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x)\right] \geq 0$$

Rezultă $s_\Delta(f,g) \leq s_{\Delta^*}(f,g)$

La fel se demonstrează şi următoarea inegalitate $S_{\Delta^*}(f,g) \leq S_\Delta(f,g)$

Putem sublinia două criterii de integrabilitate prin următoarele teoreme.

<u>Teorema 1</u>:
Criteriul Darboux

Fir $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$, f mărginită şi g crescătoare pe [a,b].

Funcția f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe [a,b] dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există u $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, avem:

$$|S_\Delta(f,g) - s_\Delta(f,g)| < \varepsilon \tag{1.8}$$

<u>Teorema 2</u>:

Dacă funcția f este continuă, iar g este crescătoare pe [a,b], atunci f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe [a,b].

<u>Demonstrație</u>:

Din f continuă pe compactul [a,b] $\Rightarrow$ f uniform continuă pe [a,b] $\overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x,y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \delta_\varepsilon$, avem:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \tag{1.9}$$

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$. Atunci pentru orice două puncte $x_k, y_k \in [t_{k-1}, t_k]$ putem scrie:

$$|f(x_k) - f(y_k)| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \tag{1.10}$$

Dacă f continuă pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ f continuă pe $[t_{k-1},t_k]$ şi îşi atinge marginile pe acest interval. Deci pentru aceste margini, putem scrie:

$$|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \tag{1.11}$$

Calculăm

$$|S_\Delta(f,g) - s_\Delta(f,g)| = \left|\sum_{k=1}^{n} M_k[g(t_k)-g(t_{k-1})] + \sum_{k=1}^{n} m_k[g(t_k)-g(t_{k-1})]\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |M_k - m_k| |[g(t_k)-g(t_{k-1})]| < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{k=1}^{n} [g(t_k)-g(t_{k-1})] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(a)] = \varepsilon$$

Conform criteriului precedent, rezultă că f este integrabilă Stieljes în raport cu g pe $[a,b]$.

Folosind sumele Riemann-Stieltjes şi definițtia integrabilității, se pot pune în evidență următoarele:

Proprietăți ale integralei Stieltjes

1) Fie $f_1, f_2, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g crescătoare pe $[a,b]$.

Dacă f_1 şi f_2 sunt integrabile Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$, atunci:

a) $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ este funcția integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$.

b) $$\boxed{\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dg(x)} \tag{1.12}$$

2) Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, g crescătoare pe $[a,b]$.

Dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi $f(x) \ge 0$ pe $[a,b]$, atunci:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dg(x) \ge 0} \tag{1.13}$$

3) Fie $[a,b)=[a,c]\cup[c,b]$

Dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe intervalele $[a,c]$ şi $[c,b]$, atunci f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi avem:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x)} \tag{1.14}$$

4) Fie $f,g_1,g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, g_1 şi g_2 crescătoare pe $[a,b]$.

Dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g_1 şi g_2 pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Stieltjes în raport cu g_1+g_2 pe $[a,b]$ şi avem:

$$\boxed{\int_a^b f(x)d(g_1+g_2)(x)=\int_a^b f(x)dg_1(x)+\int_a^b f(x)dg_2(x)} \tag{1.15}$$

5) Dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$, atunci $|f|$ este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi avem:

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)dg(x)\right|\le\int_a^b |f(x)|dg(x)} \tag{1.16}$$

6) Dacă f este continuă pe $[a,b]$ şi g este monoton crescătoare pe $[a,b]$, atunci există un punct $\xi\in[a,b]$ astfel ca:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dg(x)=f(\xi)[g(b)-g(a)]} \tag{1.17}$$

(1.17) este o <u>formulă de medie</u> pentru integrala Stieltjes.

7) Dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$, atunci şi g este integrabilă Stieltjes în raport cu f pe $[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dg(x)=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b g(x)df(x)} \tag{1.18}$$

(1.18) este <u>formula de integrare prin părţi</u> pentru integrala Stieltjes.

Un rezultat referitor la calculul unei integrale Stieltjes este dat de:

Teorema 3:

Dacă f este continuă pe $[a,b]$ iar g are derivată continuă pe $[a,b]$, atunci f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a,b]$ şi are loc egalitatea:

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx \tag{1.19}$$

Deci o integrală Stieltjes se calculează cu ajutorul unei integrale Riemann conform formulei (1.19).

Demonstraţie:

Din f şi g' continue pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ $fg' \in \mathcal{C}([a,b])$.
Deoarece f continuă pe $[a,b]$ compact $\Rightarrow$ f mărginită pe $[a,b]$ $\Rightarrow$ $|f(x)| \leq M$ $(\forall)$ $x \in [a,b]$.

De asemenea, g' continuă pe $[a,b]$ $\overset{(def)}{\Rightarrow}$ pentru $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta_\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \delta_\varepsilon$, să avem

$$|g'(x) - g'(y)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \tag{1.20}$$

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$, $\Delta = (a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ şi $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Calculăm

$$|\sigma_\Delta(fg', \xi_k) - \sigma_\Delta(f, g, \xi_k)| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]\right| =$$
$$= \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g'(\xi_k^*)(x_k - x_{k-1})\right|$$

conform teoremei lui Lagrange, cu $\xi_k{}^* \in (x_{k-1}, x_k)$

De aici rezultă:

$$\left|\sigma_\Delta(fg',\xi_k)-\sigma_\Delta(f,g,\xi_k)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)\right|\left|g'(\xi_k)-g'(\xi_k{}^*)\right|(x_k-x_{k-1}) \le$$

$$\le M\frac{\varepsilon}{M(b-a)}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

De aici rezultă că:

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_\Delta(fg',\xi_k)=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_\Delta(f,g,\xi_k),$$

adică

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\int_a^b f(x)dg(x)$$

9.2. Drumuri şi curbe în ∇^n

Prezentarea o facem pentru $\mathbb{R}^3$, transpunerea pentru un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni putând fi făcută cu multă uşurință.

Definiție:

Numim drum în ∇^3 orice aplicație continuă $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$**,** $\gamma=(f,g,h)$**.**

Această aplicație duce punctul $t\in[a,b]$, în $\gamma(t)=(f(t),g(t),h(t))\in\mathbb{R}^3$.

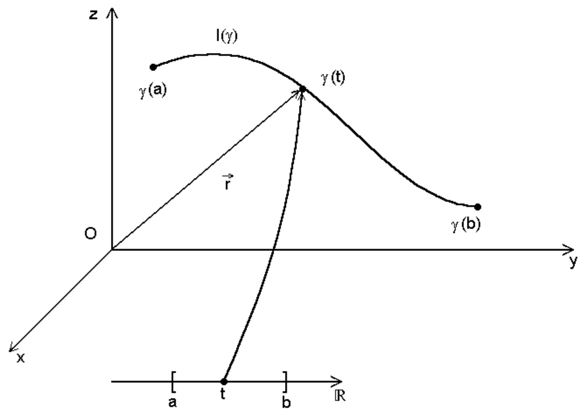
Mulțimea

$$I(\gamma)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=f(t), y=g(t), z=h(t), t\in[a,b]\right\} \qquad (2.1)$$

se numeşte imaginea drumului γ (figura 1)

Dacă notăm cu $\vec{r}$ vectorul de poziție al punctului $\gamma(t)$, $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, atunci prin identificare avem:

$$x=f(t),\ y=g(t),\ z=h(t) \qquad (2.2)$$



- Figura 1 -

Ansamblul relațiilor (2.2) pentru $t \in [a,b]$ dau o reprezentare parametrică a mulțimii $l(\gamma)$.

Punctele $\gamma(a) = (f(a), g(a), h(a)) \in \mathbb{R}^3$ şi $\gamma(b) = (f(b), g(b), h(b)) \in \mathbb{R}^3$ se numesc capetele drumului.

Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ spunem că drumul este închis. (figura 2)

Dacă pentru $a < t' < t'' < b$ avem $\gamma(t') = \gamma(t'')$ spunem că $\gamma(t') \in l(\gamma)$ este un punct multiplu al drumului.

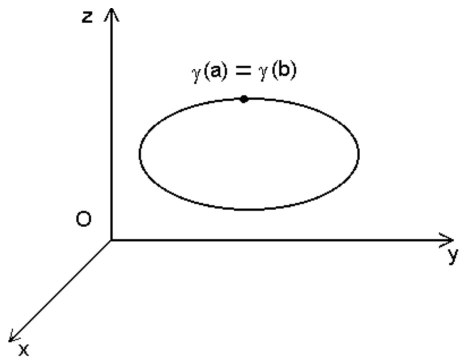
Definiție:

Drumul $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = (f, g, h)$ este simplu dacă el nu are nici un punct multiplu. (figura 3)

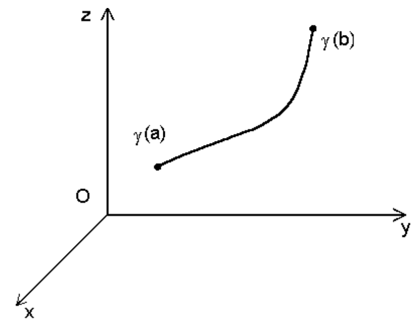
Definiție:

Drumul $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma = (f, g, h)$ este neted, dacă $\gamma \in C^1([a,b])$ şi

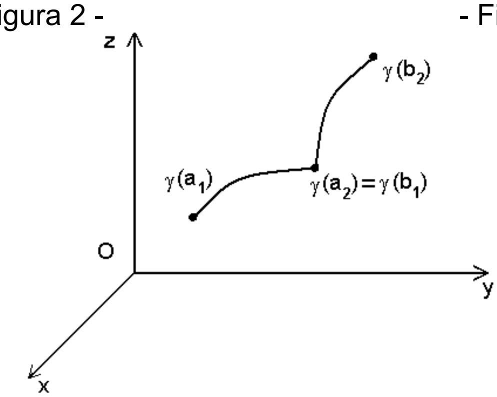
$$f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t) \neq 0,\ t \in [a,b] \qquad (2.3)$$



- Figura 2 -



- Figura 3 -



- Figura 4 -

Fie drumurile:

$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$

$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$

Dacă $b_1 = a_2$ şi $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$ spunem că drumurile sunt <u>juxtapozabile</u>.
Drumul $\gamma : [a_1, b_2] \to \mathbb{R}^3$ definit prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t), & t \in [a_2, b_2] \end{cases} \qquad (2.4)$$

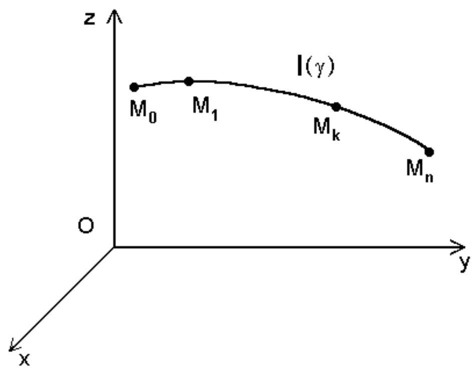
se numeşte <u>juxtapunerea drumurilor γ_1 şi γ_2</u> (figura 4) şi se notează $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

<u>Definiţie</u>:

Drumul $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ este <u>neted pe porţiuni</u>, dacă este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

Fie drumul $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma=(f,g,h)$ şi o diviziune $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$
$\Delta=(a=t_0<t_1<...<t_n=b)$

Punctele $M_0=\gamma(t_0)=\gamma(a)$, $M_1=\gamma(t_1)$, $M_2=\gamma(t_2)$, ... $M_n=\gamma(t_n)=\gamma(b)$ ce aparțin mulțimii $I(\gamma)$ determină o linie poligonală (figura 5)



\- Figura 5 -

Lungimea acestei linii poligonale, L_Δ, este dată de:

$$L_\Delta=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[f(t_k)-f(t_{k-1})]^2+[g(t_k)-g(t_{k-1})]^2+[h(t_k)-h(t_{k-1})]^2} \tag{2.5}$$

Dacă considerăm un şir de divizuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ $\Delta_n=\mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, vom putea obține şirul de numere pozitive $(L_{\Delta_n})_{n\in N}$.

<u>Definiție</u>:

Drumul <u>γ este rectificabil</u>, (are lungime) dacă şirul $(L_{\Delta_n})_{n\in N}$ este mărginit superior. Limita superioară a acestui şir se numeşte <u>lungimea drumului γ</u>, notată $L(\gamma)$

$$L(\gamma)=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,L_{\Delta_n} \tag{2.6}$$

Propoziție:

Dacă drumul $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, $\gamma=(f,g,h)$ este neted, atunci el este rectificabil şi lungimea lui este dată de:

$$\boxed{L(\gamma)=\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}dt} \tag{2.7}$$

Demonstrație:

Pentru diviziunea $\Delta\in\mathcal{D}([a,b])$, $\Delta=(a=t_0<...<t_n=b)$ lungimea liniei poligonale determinată cu punctele $M_k=\gamma(t_k)$ $(k=\overline{0,n})$ este

$$L_\Delta=\sum_{k=1}^n\sqrt{[f(t_k)-f(t_{k-1})]^2+[g(t_k)-g(t_{k-1})]^2+[h(t_k)-h(t_{k-1})]^2}$$

Deoarece drumul γ a fost presupus neted, funcțiile $f,g,h\in C^1([a,b])$ deci sunt cuntinue şi derivabile pe orice interval $[t_{k-1},t_k]$. Astfel putem aplica teorema Lagrange pe fiecare interval. Deci există puncte $\xi_k,\eta_k,\zeta_k\in(t_{k-1},t_k)$ astfel ca

$$L_\Delta=\sum_{k=1}^n\sqrt{f'^2(\xi_k)+g'^2(\eta_k)+h'^2(\zeta_k)}(t_k-t_{k-1}) \tag{2.8}$$

Notăm cu $D=[a,b]\times[a,b]\times[a,b]\subset\mathbb{R}^3$ şi considerăm funcția $F:D\to\mathbb{R}$, definită astfel

$$F(u,v,w)=\sqrt{f'^2(u)+g'^2(v)+h'^2(w)} \tag{2.9}$$

Putem spune că F este continuă pe domeniul compact $D\subset\mathbb{R}^3$, deci este şi uniform continuă pe acesta. Prin urmare, pentru orice $\varepsilon>0$ există un $\delta_\varepsilon>0$ astfel ca pentru orice două puncte (u',v',w') şi $(u'',v'',w'')\in D$ cu proprietatea $|u'-u''|<\delta_\varepsilon$, $|v'-v''|<\delta_\varepsilon$, $|w'-w''|<\delta_\varepsilon$ să avem:

$$|F(u',v',w')-F(u'',v'',w'')|<\frac{\varepsilon}{b-a} \tag{2.10}$$

Fie diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$ astfel ca $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$. Atunci pentru $u' = \xi_k$, $v' = \eta_k$, $w' = \zeta_k$, $u'' = v'' = w'' = t_k$, inegalitatea (2.10) devine

$$|F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) - F(t_k,t_k,t_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{2.11}$$

sau dacă ținem seama de (2.9) obținem:

$$\left|\sqrt{f'^2(\xi_k)+g'^2(\eta_k)+h'^2(\zeta_k)} - \sqrt{f'^2(t_k)+g'^2(t_k)+h'^2(t_k)}\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \tag{2.12}$$

Calculăm

$$|L_\Delta - \sigma_\Delta(F,t_k)| = \left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{f'^2(\xi_k)+g'^2(\eta_k)+h'^2(\zeta_k)}(t_k - t_{k-1}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{n}\sqrt{f'^2(t_k)+g'^2(t_k)+h'^2(t_k)}(t_k - t_{k-1})\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|\sqrt{f'^2(\xi_k)+g'^2(\eta_k)+h'^2(\zeta_k)} - \right.$$
$$\left. - \sqrt{f'^2(t_k)+g'^2(t_k)+h'^2(t_k)}\right|(t_k - t_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Prin urmare putem scrie

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} L_\Delta = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sigma_\Delta(F,t_k) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}dt$$

Rezultă

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}dt$$

Fie drumurile

$\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_1 \in C^0([a_1,b_1])$

$\gamma_2 : [a_2,b_2] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma_2 \in C^0([a_2,b_2])$

Definiție:

Drumurile γ_1 și γ_2 sunt echivalente $(\gamma_1 \approx \gamma_2)$, dacă există o aplicație continuă şi strict crescătoare $\varphi : [a_1,b_1] \to [a_2,b_2]$ astfel ca:

$$\begin{cases} \varphi(a_1) = a_2 \\ \varphi(b_1) = b_2 \\ \gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \ (\forall)\ t \in [a_1,b_1] \end{cases} \tag{2.13}$$

Observație:---

Din definiția dată, deoarece $\varphi([a_1,b_1])=[a_2,b_2]$, se vede imediat că <u>două drumuri echivalente au aceeaşi imagine</u>.

De asemenea se poate demonstra următoarea:

> <u>Propoziție</u>:
> Un drum echivalent cu un drum rectificabil este şi el rectificabil, drumurile având aceeaşi lungime.

<u>Demonstrație</u>:

Fie $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma_1=(f_1,g_1,h_1)$
$\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma_2=(f_2,g_2,h_2)$

drumurile echivalente şi

$$x=f_1(t),\ y=g_1(t),\ z=h_1(t),\ t\in[a_1,b_1] \tag{2.14}$$

o reprezentare parametrică a lui γ_1, iar

$$x=f_2(\tau),\ y=g_2(\tau),\ z=h_2(\tau),\ \tau\in[a_2,b_2] \tag{2.15}$$

o reprezentare parametrică a lui γ_2.

Dacă $\varphi:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$ este funcția care apare în condiția de echivalență a drumurilor γ_1 şi γ_2, atunci orice diviziune
$\Delta_2=(a_2=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n=b_2)$

a intervalului $[a_2,b_2]$ este imaginea prin φ a unei diviziuni
$\Delta_1=(a_1=t_0<t_1<\ldots<t_n=b_1)$

a intervalului $[a_1,b_1]$. Putem scrie:

$$\boxed{\tau_k=\varphi(t_k)},\ k=\overline{0,n} \tag{2.16}$$

Reciproc, oricărei diviziuni Δ_1, îi corespunde o diviziune Δ_2.

De asemenea, din definiția echivalenței drumurilor, avem

$$f_1(t) = f_2[\varphi(t)],\ g_1(t) = g_2[\varphi(t)],\ h_1(t) = h_2[\varphi(t)] \tag{2.17}$$

pentru orice $t \in [a_1, b_1]$.

Putem scrie:

$$L_{\Delta_1} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f_1(t_k) - f_1(t_{k-1})]^2 + [g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})]^2 + [h_1(t_k) - h_1(t_{k-1})]^2} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f_2(\tau_k) - f_2(\tau_{k-1})]^2 + [g_2(\tau_k) - g_2(\tau_{k-1})]^2 + [h_2(\tau_k) - h_2(\tau_{k-1})]^2} = L_{\Delta_2} \tag{2.18}$$

Din (2.18) putem spune că mulțimile de numere pozitive $\{L_{\Delta_1}\}$ şi $\{L_{\Delta_2}\}$ coincid. Limitele superioare ale şirurilor formate coincid în cazul în care acestea există. Prin urmare, cele două drumuri echivalente au aceeaşi lungime.

<u>Definiție</u>:

Numim <u>curbă în ∇^3</u> o clasă de drumuri din $\wp^3$ echivalente.

Un <u>exemplu</u> de drumuri aparținând aceleiaşi curbe este dat de:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t,\ t \in [0,1] \\ z = t \end{cases} \text{ şi } \gamma_2 : \begin{cases} x = 2\tau \\ y = 2\tau,\ \tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ z = 2\tau \end{cases}$$

Funcția continuă $\varphi : [0,1] \to \left[0, \frac{1}{2}\right]$ este definită de $\varphi(t) = \frac{t}{2}$.

Relativ la curbe, se introduc următoarele noțiuni: <u>imaginea curbei</u>, ca fiind imaginea unui drum conținut de curbă; <u>curba simplă</u>, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum simplu; <u>curba închisă</u>, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum închis; <u>curba rectificabilă</u>, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum rectificabil; <u>lungimea unei curbe rectificabile</u>, ca fiind lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc această curbă şi aşa mai departe.

Trebuie să subliniem faptul că pentru o curbă, notată cu Γ, reprezentarea parametrică a mulțimii $I(\Gamma)$ (numită imaginea curbei Γ) o dăm folosind reprezentarea parametrică a mulțimii $I(\gamma) \subset \wp^3$, unde γ este un drum care aparține acestei curbe.

Astfel, curba Γ o definim prin:

$$\Gamma:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \quad t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases} \tag{2.19}$$

Exemplu: --

Să se determine lungimea curbei Γ definită de reprezentarea:

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \;, \; t \in [0,2\pi];\; a,b > 0 \\ z = bt \end{cases} \tag{2.20}$$

Folosim formula (2.7) şi avem:

$$L(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

9.3. Integrala curbilinie de primul tip

La această noțiune se poate ajunge pornind de la problema determinării masei unui fir material greu.

Fie un fir material ce ocupă în $\mathbb{R}^3$ imaginea unei curbe Γ, rectificabile, dată de reprezentarea parametrică

$$\Gamma:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), \; t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

Fie $\rho : I(\Gamma) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ funcția densitate.
Notăm cu $\Gamma(t)$ curba rectificabilă definită de reprezentarea:

$$\Gamma(t):\begin{cases} x = f(\tau) \\ y = g(\tau), \; \tau \in [a,t] \subset [a,b] \\ z = h(\tau) \end{cases} \tag{3.2}$$

Lungimea ei, notată $l(t)$, conform (2.7) este dată de integrala:

$$l(t)=\int_a^t \sqrt{f'^2(\tau)+g'^2(\tau)+h'^2(\tau)}\,d\tau \qquad (3.3)$$

Putem spune că $l:[a,b]\to \mathbb{R}^+$ este o funcție crescătoare pe acest interval.

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$, $\Delta=(a=t_0<...<t_n=b)$ şi punctele $\xi_k \in [t_{k-1},t_k]$, $k=\overline{1,n}$, arbitrar alese în intervalele corespunzătoare.

Putem afirma că <u>masa M a firului material</u> poate fi aproximată prin următoarea sumă:

$$M \approx \sum_{k=1}^{n} \rho[f(\xi_k),g(\xi_k),h(\xi_k)][l(t_k)-l(t_{k-1})]=\sigma_\Delta(\rho,l) \qquad (3.4)$$

Aceasta este o sumă Stieltjes scrisă pentru funcțiile ρ, l şi o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$.

Evident, masa firului este aproximată mai bine dacă considerăm diviziuni Δ^* cu $\|\Delta^*\|<\|\Delta\|$.

Astfel, pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$, $\Delta_n \in \mathcal{D}([a,b])$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0$, masa firului material este:

$$M=\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n}(\rho,l)=\int_a^b \rho[f(t),g(t),h(t)]\,dl(t) \qquad (3.5)$$

Prin urmare, masa unui fir material se poate calcula cu o integrală Stieltjes. Există şi alte probleme care pot fi rezolvate cu o astfel de integrală; de exemplu problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci când se cunoaşte densitatea de repartiție în fiecare punct al firului.

Fie un domeniu $D\subset \mathbb{R}^3$ care conține imaginea curbei rectificabile Γ dată de reprezentarea (3.1) şi o funcție $F:D\to \mathbb{R}$.

<u>Definiție</u>:

Dacă există integrala Stieltjes:

$$\int_a^b F[f(t), g(t), f(t)]\,dl(t) \tag{3.6}$$

atunci spunem că <u>F este integrabilă Stieltjes în raport cu funcția l în lungul curbei Γ</u>.

Integrala (3.6) o notăm

$$\boxed{\int_\Gamma F(x, y, z)\,dl} \tag{3.7}$$

şi o numim <u>integrala curbilinie de primul tip a funcției F în lungul curbei Γ</u>.

În cele ce urmează vom arăta că nici existența, nici valoarea integralei curbilinii (3.7) nu depind de alegerea drumului, ci numai de curba Γ.

<u>Teorema 1</u>:

Fie drumurile γ_1 şi γ_2 definite de:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \\ z = h_1(t) \end{cases} t \in [a_1, b_1], \quad \gamma_2 : \begin{cases} x = f_2(\tau) \\ y = g_2(\tau) \\ z = h_2(\tau) \end{cases} \tau \in [a_2, b_2]$$

şi funcția $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D fiind un domeniu care conține mulțimea $I(\gamma_1)$.

Dacă drumurile γ_1 şi γ_2 sunt echivalente, atunci existența uneia dintre integralele Stieltjes,

$$\int_a^b F[f_1(t), g_1(t), h_1(t)]\,dl_1(t) \text{ şi } \int_a^b F[f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)]\,dl_2(\tau)$$

implică existența celeilalte precum şi egalitatea lor.

<u>Demonstrație</u>:

Presupunem că prima integrală există. Fie

$\Delta_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b_1)$

o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$. Funcția φ care apare în condiția de echivalență a drumurilor γ_1 şi γ_2, asociază lui Δ_1 o diviziune:

$\Delta_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n = b_2)$

a intervalului $[a_2, b_2]$ astfel ca $\underline{\varphi(t_k) = \tau_k}$.

Fie $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Prin funcția φ, acestuia îi corespunde punctul $\eta_k \in [\tau_{k-1}, \tau_k]$ astfel că $\eta_k = \varphi(\xi_k)$.

Din $\gamma_1 \approx \gamma_2$, pentru orice $t \in [a_1, b_1]$ avem $l_1(t) = l_2(\tau)$; $f_1(t) = f_2(\varphi(t))$; $g_1(t) = g_2(\varphi(t))$ şi $h_1(t) = h_2(\varphi(t))$.

Prin urmare, putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} F[f_1(\xi_k), g_1(\xi_k), h_1(\xi_k)][l_1(t_k) - l_1(t_{k-1})] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F[f_2(\eta_k), g_2(\eta_k), h_2(\eta_k)]\ [l_2(\tau_k) - l_2(\tau_{k-1})]$$

adică

$$\underline{\sigma_{\Delta_1}(F, l_1) = \sigma_{\Delta_2}(F, l_2)} \tag{3.8}$$

Cu observația că φ este uniform continuă pe $[a_1, b_1]$ rezultă că în cazul în care $\|\Delta_1\| \to 0$, atunci şi $\|\Delta_2\| \to 0$. Concluzia teoremei rezultă din (3.8) prin trecere la limită.

În legătură cu calculul integralei curbilinii de primul tip, demonstrăm:

<u>Teorema 2</u>:

Dacă curba Γ definită de reprezentarea:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in [a, b] \\ z = h(t) \end{cases}$$

este netedă iar funcția F este continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ care conține imaginea lui Γ atunci:

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dl = \int_a^b F[f(t), g(t), h(t)] \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt \tag{3.9}$$

Formula (3.9) ne spune că o integrală curbilinie de primul tip se calculează cu ajutorul unei integrale Riemann simple.

Demonstrație:
Vom folosi rezultatul (1.19) referitor la calculul unei integrale Stieltjes. Este suficient să arătăm că funcția crescătoare $l:[a,b]\to\mathbb{R}$

$$l(t)=\int_a^t\sqrt{f'^2(\tau)+g'^2(\tau)+h'^2(\tau)}d\tau \qquad (3.10)$$

are derivata continuă pe (a,b).

Într-adevăr, apelând la formula de derivare în raport cu parametrul, a unei integrale cu parametru, obținem:

$$l'(t)=\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)} \qquad (3.11)$$

Aceasta este continuă deoarece $f,g,h\in C^1([a,b])$

Atunci, conform (1.19) avem

$$\int_\Gamma F(x,y,z)\,dl=\int_a^b F[f(t),g(t),h(t)]\,l'(t)dt=\int_a^b F[f(t),g(t),h(t)]\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,dt$$

Aplicații ale integralei curbilinii de primul tip

Pentru un fir material care este imaginea în $\mathbb{R}^3$ a unei curbe Γ simple, rectificabile şi $\rho(x,y,z)$ este funcția densitate, putem determina:

1) Lungimea firului

$$\boxed{L(\Gamma)=\int_\Gamma dl} \qquad (3.12)$$

2) Masa firului

$$\boxed{M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,dl} \qquad (3.13)$$

3) Coordonatele centrului de greutate

$$\boxed{\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,dl \\ y_g &= \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,dl \\ z_g &= \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,dl \end{aligned}} \qquad (3.14)$$

4) Momentele de inerție

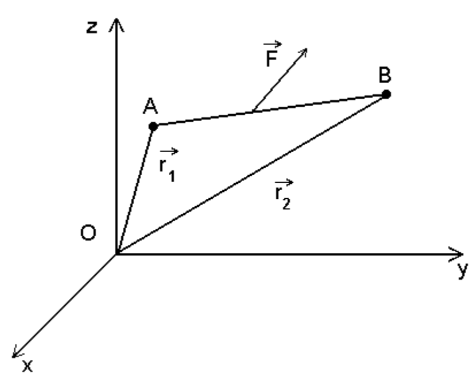
$$\boxed{\begin{aligned} I_{OX} &= \int_\Gamma \left(y^2+z^2\right)\rho\,(x,y,z)\,dl \\ I_{XOY} &= \int_\Gamma z^2\rho\,(x,y,z)dl \\ I_O &= \int_\Gamma \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho\,(x,y,z)\,dl \end{aligned}} \qquad (3.15)$$

Prin analogie, se pot da expresiile şi pentru celelalte momente de inerție.

9.4. Integrale curbilinii de al doilea tip

La această noțiune se poate ajunge pornind de la determinarea lucrului mecanic.

Fie un segment $\overline{AB}$ determinat de punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ (figura 6)



- Figura 6 -

Notăm cu $\vec{r}_1$ şi $\vec{r}_2$ vectorii de poziție ai punctelor A şi B.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{r}_2 &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Fie $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ o forță constantă care acționează asupra unui punct material ce se deplasează pe $\overline{AB}$ de la A spre B.

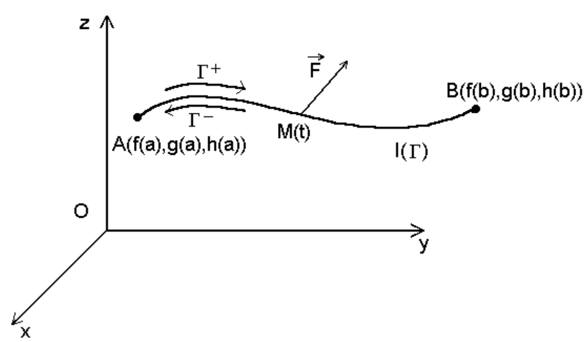
Ştim că lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ este dat de produsul scalar:

$$\begin{aligned} L &= \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \\ &= P(x_2 - x_1) + Q(y_2 - y_1) + R(z_2 - z_1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Prin generalizare, fie o curbă Γ din $\mathbb{R}^3$, rectificabilă, dată de reprezentarea parametrică:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases} \tag{4.3}$$

un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ astfel ca $I(\Gamma) \subset D$ şi o funcție vectorială $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = [P,Q,R]$.



- Figura 7 -

Când t parcurge continuu intervalul $[a,b]$ de la a la b, punctul corespunzător, $M(t) \in I(\Gamma)$ parcurge această mulțime într-un sens pe care-l numim <u>direct</u>. În caz contrar, când t parcurge continuu intervalul $[a,b]$ de la b la a, punctul $M(t)$ parcurge $I(\Gamma)$ în <u>sens invers</u>.

Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ se ntoează cu Γ^{+}. În mod asemănător, se defineşte Γ^{-}. (figura 7).

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}([a,b])$
$\Delta = (a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b)$
şi punctele arbitrar alese $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,n}$

Lucrul mecanic al forței variabile $\vec{F}$ ce acționează asupra unui punct material care se deplasează pe $I(\Gamma)$ în sens direct poate fi aproximat prin

$$\begin{aligned} L \approx & \sum_{k=1}^{n} P[f(\xi_k), g(\xi_k), h(\xi_k)][f(t_k) - f(t_{k-1})] + \\ & + \sum_{k=1}^{n} Q[f(\xi_k), g(\xi_k), h(\xi_k)][g(t_k) - g(t_{k-1})] + \\ & + \sum_{k=1}^{n} R[f(\xi_k), g(\xi_k), h(\xi_k)][h(t_k) - h(t_{k-1})] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Se observă că sumele din dreapta sunt sume Riemann-Stieltjes, deci putem scrie:

$$L \approx \sigma_{\Delta}(P, f) + \sigma_{\Delta}(Q, g) + \sigma_{\Delta}(R, h) \tag{4.5}$$

Prin urmare, lucrul mecanic este dat de suma a trei integrale Stieltjes.

$$\begin{aligned} L \approx & \int_a^b P[f(t), g(t), h(t)] df(t) + \int_a^b Q[f(t), g(t), h(t)] dg(t) + \\ & + \int_a^b R[f(t), g(t), h(t)] dh(t) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Definiție:

Dacă Γ este o curbă rectificabilă orientată, dată de reprezentarea (4.3), dacă $\vec{F} : I(\Gamma) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^0(I(\Gamma))$ şi dacă există integralele Stieltjes:

$$\int_a^b P[f(t), g(t), h(t)] df(t), \quad \int_a^b Q[f(t), g(t), h(t)] dg(t), \quad \int_a^b R[f(t), g(t), h(t)] dh(t)$$

atunci suma lor se notează:

$$\boxed{\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz} \qquad (4.7)$$

şi se numeşte <u>integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale $\vec{F}$ în lungul curbei Γ</u>.

În cazul de față spunem că <u>$\vec{F}$ este integrabilă în raport cu coordonatele în lungul curbei Γ</u>.

<u>Observație</u>:---

Pentru integrala (4.7) putem folosi notația simplă $\int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r}$, dacă notăm:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

<u>Proprietăți</u>:

1) Integrala curbilinie de al doilea tip depinde de sensul de parcurgere a lui Γ.

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{\Gamma^-} \vec{F} d\vec{r}} \qquad (4.8)$$

2) Dacă $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ sunt integrabile în raport cu coordonatele în lungul curbei Γ, atunci şi funcția $\alpha_1\vec{F}_1 + \alpha_2\vec{F}_2$ $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R})$ are această proprietate şi

$$\boxed{\int_{\Gamma} (\alpha_1\vec{F}_1 + \alpha_2\vec{F}_2) d\vec{r} = \alpha_1 \int_{\Gamma} \vec{F}_1 d\vec{r} + \alpha_2 \int_{\Gamma} \vec{F}_2 d\vec{r}} \qquad (4.9)$$

3) Dacă $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ este juxtapunerea curbelor Γ_1, Γ_2 iar $\vec{F}$ este o funcție integrabilă în raport cu coordonatele în lungul curbelor Γ_1 şi Γ_2, atunci $\vec{F}$ este integrabilă în raport cu coordonatele în lungul lui Γ şi avem

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r} + \int_{\Gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r}} \qquad (4.10)$$

4) Dacă drumurile rectificabile γ_1 şi γ_2 sunt echivalente $(\gamma_1 \approx \gamma_2)$ şi dacă $\vec{F}$ este integrabilă în raport cu coordonatele în lungul lui γ_1 şi γ_2, atunci

$$\boxed{\int_{\gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r}} \tag{4.11}$$

În legătură cu calculul integralei curbilinii de al doilea tip, subliniem următoarea:

Teoremă:

Dacă Γ este o curbă netedă dată de reprezentarea:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \quad t \in [a,b] \\ z = h(t) \end{cases}$$

iar $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $(I(\Gamma) \subset D)$ este funcție continuă pe D, atunci există şi sunt egale următoarele integrale

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int_a^b \{P[f(t),g(t),h(t)]f'(t) + Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t) + \\ &\qquad + R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)\}dt \end{aligned}} \tag{4.12}$$

(4.12) ne arată că o integrală curbilinie de al doilea tip se calculează cu ajutorul unei integrale Riemann simple.

Demonstrație:

Deoarece curba Γ a fost presupusă netedă, înseamnă că funcțiile f,g,h au derivată continuă pe $[a,b]$. Putem folosi formula de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann şi obținem:

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma P(x,y,z)dx = \int_a^b P[f(t),g(t),h(t)]f'(t)dt \\ &\int_\Gamma Q(x,y,z)dy = \int_a^b Q[f(t),g(t),h(t)]g'(t)dt \\ &\int_\Gamma R(x,y,z)dz = \int_a^b R[f(t),g(t),h(t)]h'(t)dt \end{aligned} \tag{4.13}$$

Prin adunare, obținem (4.12).

<u>Exemplu:</u> --

Să se calculeze:

$$I=\int_{\Gamma} ydx-xdy+\left(x^2+y^2+z^2\right)dz \tag{4.14}$$

unde curba Γ este definită de reprezentarea parametrică:

$$\Gamma:\begin{cases} x=-t\cos t+\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \qquad t\in[0,\pi] \\ z=t+1 \end{cases} \tag{4.15}$$

În cazul de față avem:

$$\begin{array}{lll} f(t)=-t\cos t+\sin t & \Rightarrow & f'(t)=t\sin t \\ g(t)=t\sin t+\cos t & \Rightarrow & g'(t)=t\cos t \\ h(t)=t+1 & \Rightarrow & h'(t)=1 \end{array}$$

Aplicând (4.12) obținem:

$$I=\int_0^{\pi}[(t\sin t+\cos t)t\sin t-(-t\cos t+\sin t)t\cos t+(-t\cos t+\sin t)^2+$$

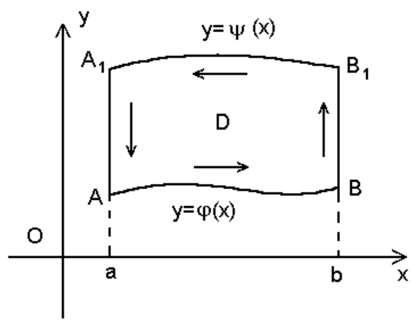
$$+(t\sin t+\cos t)^2+(t+1)^2]dt=\int_0^{\pi}\left(3t^2+2t+2\right)dt=\pi^3+\pi^2+2\pi$$

<u>9.5. Formula lui Green</u>

Vom studia legătura dintre integrala dublă şi integrala curbilinie de al doilea tip. La început, vom trata această problemă pentru domenii simple față de ambele axe de coordonate, iar apoi pentru domenii care se pot descompune într-un număr finit de astfel de domenii simple.

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$, un domeniu simplu față de axa OY (figura 8) definit de:

$$\begin{gathered} D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[a,b],\, y\in[\varphi(x),\psi(x)], \\ \varphi,\psi\in C^0([a,b]),\ \varphi(x)\le\psi(x) \text{ pe } [a,b]\} \end{gathered} \tag{5.1}$$



- Figura 8 -

Pentru frontiera acestui domeniu folosim notația, ∂D şi observăm că este formată din imaginile a patru curbe:

$$\partial D = \overset{\frown}{AB} \cup \overline{BB_1} \cup \overset{\frown}{B_1A_1} \cup \overline{A_1A} \tag{5.2}$$

Pe frontiera ∂D luăm ca <u>sens pozitiv</u> de parcurgere, sensul trigonometric (sensul dat pe ∂D de un observator care prin deplasare pe această curbă, lasă domeniul D în stânga, (figura 8).

<u>Lemă</u>:

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu simplu față de axa OY dat de (5.1) iar $P : D \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă şi derivabilă pe D cu $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ continuă pe D, atunci:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\int_{\partial D^+} P(x,y)\,dx \tag{5.3}$$

<u>Demonstrație</u>:

*) Calculăm:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b [P(x,\psi(x)) - P(x,\varphi(x))]\,dx \tag{5.4}$$

**) Calculăm

$$\int_{\partial D^+} P(x,y)\,dx = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{BB_1}} P(x,y)\,dx + \int_{\overset{\frown}{B_1A_1}} P(x,y)\,dx + \int_{\overline{A_1A}} P(x,y)\,dx$$

ținând seama de reprezentările parametrice ale celor patru curbe ce formează ∂D.

$$\overset{\frown}{AB}: \begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad t \in [a,b]; \qquad \overline{BB_1}: \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases} \quad t \in [\varphi(b), \psi(b)];$$

$$\overset{\frown}{B_1A_1}:\begin{cases}x=t\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad t\in[b,a];\qquad \overline{A_1A}:\begin{cases}x=a\\ y=t\end{cases}\quad t\in[\psi(a),\varphi(a)]$$

Obținem:

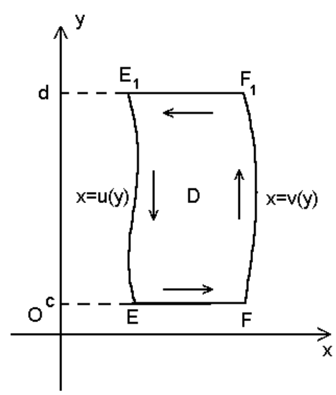
$$\int_{\partial D^+} P(x,y)dx=\int_a^b P(t,\varphi(t))dt+\int_b^a P(t,\psi(t))dt+\int_a^b [P(t,\varphi(t))-P(t,\psi(t))]dt \qquad (5.5)$$

Din (5.4) şi (5.5) deducem:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy=-\iint_{\partial D^+} P(x,y)dx$$

Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu simplu față de OX (figura 9) definit de:

$$\begin{aligned}&D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[c,d],x\in[u(y),v(y)]\\&u,v\in C^0([a,b]),\ u(y)\le v(y)\ \text{pe}\ [c,d]\}\end{aligned} \qquad (5.6)$$



- Figura 9 -

$$\partial D= \overset{\frown}{EF} \cup FF_1 \cup \overset{\frown}{F_1E_1} \cup E_1E \qquad (5.7)$$

<u>Lema 2</u>:
Dacă D este un domeniu simplu față de axa OX dat de (5.6) iar $Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă şi derivabilă pe D cu $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continuă pe D, atunci:

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy=\int_{\partial D^+} Q(x,y)dy \qquad (5.8)$$

Demonstrația este asemănătoare cu cea precedetă.

<u>Teoremă</u>:

Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu simplu față de ambele axe de coordonate, iar P şi $Q : D \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue şi derivabile pe D cu $\frac{\partial P}{\partial y}$ şi $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue pe D, atunci:

$$\int_{\partial D^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right]dxdy \qquad (5.9)$$

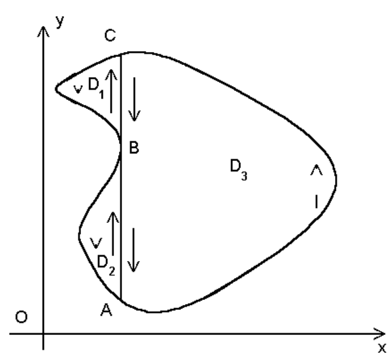
(5.9) este Formula lui Green pentru domenii simple. Aceasta se obține prin adunarea relațiilor (5.3) şi (5.8).

Să considerăm acum un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$ care se poate scrie sub forma:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n,\ \overset{o}{D}_i \cap \overset{o}{D}_j = \Phi \text{ pentru } i \neq j \qquad (5.10)$$

unde $D_1...D_n$ sunt domenii compacte, simple față de ambele axe de coordonate.

Fie de exemplu, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (figura 10).



- Figura 10 -

Conform formulei (5.9) putem scrie:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{k=1}^{3} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial D_k^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{\partial D^+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

deoarece pe segmentele $\overline{AB}$ şi $\overline{BC}$ apar integralele

$$\int_{\overline{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overline{BA}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$\int_{\overline{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{\overline{CB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Prin urmare, formula lui Green (5.9) rămâne valabilă şi în cazul în care domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ se descompune într-un număr finit de domenii simple față de ambele axe de coordonate.

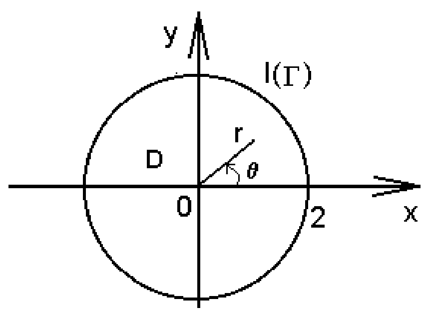
<u>Exemplu:</u> ---

Să se calculeze:

$$\int_{\Gamma} \left(-x^2ydx + xy^2dy\right) \tag{5.10}$$

unde Γ este cercul $x^2 + y^2 = 4$

În cazul de față $P(x,y) = -x^2y$ şi $Q(x,y) = xy^2$.



- Figura 11 -

Conform (5.9) obținem:

$$I = \int_{\Gamma} \left(-x^2ydx + xy^2dy\right) = \iint_{D} \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

Această integrală dublă se poate calcula folosind coordonatele polare:

$$D : \begin{vmatrix} x = r\cos\theta & r \in [0,2] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{vmatrix} \tag{5.11}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = \theta\Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^2 = 8\pi$$

-- 🕮

9.6. Integrala curbilinie independentă de drum

Una dintre problemele importante puse de fizică este aceea a independenței lucrului mecanic față de drum, adică valoarea lucrului mecanic să nu depindă de curba pe a cărei imagine se deplasează punctul material, ci numai de capetele acesteia. În acest sens, un exemplu ne este oferit de forță gravitațională.

Condiții necesare şi suficiente pentru ca o integrală curbilinie de al doilea tip să nu depindă de drum ne sunt date de următoarea:

Teoremă:
Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu conex, iar $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}$ este continuă pe D, $\vec{F} = [P, Q, R]$, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) Există o funcție $V : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferențiabilă astfel ca

$$\boxed{dV(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz} \tag{6.1}$$

2) Dacă Γ este o curbă inchisă, netedă, sau netedă pe porțiuni, cu $I(\Gamma) \subset D$,

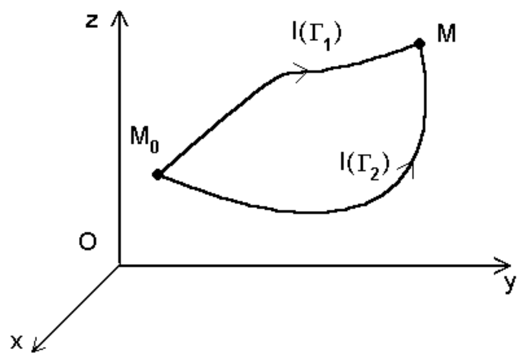
$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = 0} \tag{6.2}$$

3) Pentru orice două curbe cu $I(\Gamma_1) \subset D$ şi $I(\Gamma_2) \subset D$ care au capetele în punctele M_0 şi $M \in D$.

$$\boxed{\int_{\Gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r}} \tag{6.3}$$

Demonstrație:
1) $\Rightarrow$ 3)

Fie punctele fixate, dar arbitrar alese, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in D$ şi $M(x,y,z) \in D$



- Figura 12 -

Fie Γ_1 o curbă simplă, netedă cu capetele în M_0 şi M dată de reprezentarea:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = f(\tau) \\ y = g(\tau) \quad \tau \in [t_0, t] \\ z = h(\tau) \end{cases} \tag{6.4}$$

$I(\Gamma_1) \subset D$. Dacă ţinem seama de condiţia (6.1) şi de formula de calcul a integralei curbilinii de al doilea tip, avem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{\Gamma_1^+} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ &= \int_{\Gamma_1^+} \frac{\partial V}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial V}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial V}{\partial z}(x,y,z)dz = \\ &= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{df}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dg}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dh}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial V}{\partial \tau} d\tau = V[f(\tau), g(\tau), h(\tau)]\Big|_{t_0}^{t} = V(M) - V(M_0) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Din rezultatul (6.5) constatăm că valoarea integralei $\int_{\Gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r}$ depinde numai de punctele M şi M_0, capetele curbei Γ_1.

Astfel, pentru orice altă curbă Γ_2 cu $I(\Gamma_2) \subset D$ şi capetele în M_0 şi M obţinem:

$$\int_{\Gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r} = V(M) - V(M_0)$$

3) $\Rightarrow$ 1)

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ punct fixat, $M(x, y, z) \in D$ un punct curent şi o curbă cu capetele în M_0 şi M, $\Gamma_{M_O M}$, cu $I(\Gamma_{M_O M}) \subset D$.

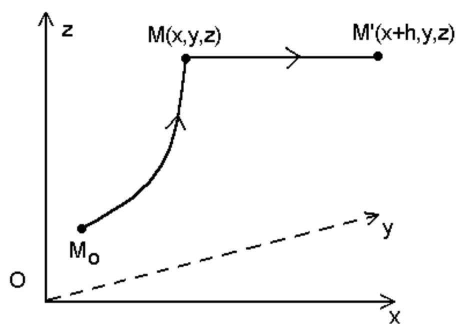
Fie $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in [P, Q, R]$ funcția vectorială pentru care valoarea integralei curbilinii pe orice curbă $\Gamma_{M_O M}$ depinde numai de alegerea punctului M.

Notăm:

$$V(M) = V(x, y, z) = \int_{\Gamma^{+}_{M_O M}} \vec{F} d\vec{r} \tag{6.6}$$

Este suficient să arătăm că pe mulțimea D,

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z) \tag{6.7}$$



- Figura 13 -

Fie punctul $M'(x + h, y, z) \in D$ şi avem:

$$V(x + h, y, z) = \int_{\Gamma^{+}_{M_O M} \cup \Gamma^{+}_{MM'}} \vec{F} d\vec{r} \tag{6.8}$$

Calculăm:

$$V(x + h, y, z) - V(x, y, z) = \int_{\Gamma^{+}_{M_O M} \cup \Gamma^{+}_{MM'}} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\Gamma^{+}_{M_O M}} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\Gamma^{+}_{MM'}} \vec{F} d\vec{r} =$$

$$= \int_{\Gamma^{+}_{MM'}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{x}^{x+h} P(t, y, z)dt \tag{6.9}$$

deoarece pentru $\Gamma^{+}_{MM'}$ avem reprezentarea:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y \ \ (\text{const}) \quad t \in [x, x+h] \\ z = z \ \ (\text{const}) \end{cases}$$

Cum P este funcție continuă pe D, putem aplica o teoremă de medie pentru integrala Riemann obținută. Deci există $\theta \in (0,1)$ astfel ca:

$$V(x+h, y, z) - V(x, y, z) = h \cdot P(x + \theta h, y, z) \qquad (6.10)$$

Folosim din nou continuitatea lui P şi pentru orice $(x, y, z) \in D$ calculăm:

$$\lim_{h \to 0} \frac{V(x+h, y, z) - V(x, y, z)}{h} = \lim_{h \to 0} P(x + \theta h, y, z) = P(x, y, z) \qquad (6.11)$$

Prin urmare, $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = P(x, y, z)$ pentru orice $(x, y, z) \in D$.

Cu ajutorul unui calcul asemănător, se arată că:
$\dfrac{\partial V}{\partial y} = Q$ şi $\dfrac{\partial V}{\partial z} = R$ pentru orice $(x, y, z) \in D$.

2) $\Rightarrow$ 3)

Fie Γ_1 şi Γ_2 două curbe netede având capetele în punctele M_0 şi $M \in D$ care au imaginile în D. (figura 12).

Notăm $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ curba închisă. Dacă presupunem 2) adevărată, atunci $\int\limits_{\Gamma^+} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r} + \int\limits_{\Gamma_1^-} \vec{F} d\vec{r} = 0$, de unde deducem

$$\int\limits_{\Gamma_1^+} \vec{F} d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2^+} \vec{F} d\vec{r}$$

3) $\Rightarrow$ 2) rezultă imediat urmând un raționament asemănător precedentului.

Deci problema studiului independenței față de drum a unei integrale curbilinii de al doilea tip revine la a recunoaşte dacă expresia de sub integrală este o diferențială exactă.

Teoremă:

Dacă funcțiile $P,Q,R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D domeniu simplu conex, au derivatele parțiale de ordinul întâi continue pe D, atunci expresia:

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{6.12}$$

este o diferențială totală exactă, dacă şi numai dacă pentru orice $(x,y,z) \in D$ au loc egalitățile:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \tag{6.13}$$

Demonstrație:

"$\Rightarrow$" Presupunem că (6.12) este o diferențială exactă, deci existtă o funcție $V : D \to \mathbb{R}$ astfel că:

$$dV(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz \tag{6.14}$$

pentru orice $(x,y,z) \in D$.

Rezultă, că pentru orice $(x,y,z) \in D$ au loc relațiile

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P;\ \frac{\partial V}{\partial y} = Q;\ \frac{\partial V}{\partial z} = R \tag{6.15}$$

Deoarece am presupus că P, Q, R au derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D, rezultă că toate derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției V sunt continue pe D. Dacă ne referim numai la derivatele mixte, putem scrie:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial R}{\partial z};\ \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \tag{6.16}$$

Conform criteriului lui Schwarz referitor la egalitatea derivatelor mixte, deducem (6.13)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

"$\Leftarrow$" Presupunem că au loc egalitațile (6.13) şi să arătăm că există o funcție $V: D \to \mathbb{R}$ astfel că
$dV = Pdx + Qdy + Rdz$

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ punct fixat şi $M(x, y, z) \in D$ un punct curent.

Fie funcția $V: D \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$\boxed{V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)dt} \qquad (6.14)$$

şi arătăm că $\dfrac{\partial V}{\partial x}(x,y,z) = P(x,y,z)$.

Conform formulei de derivare a unei integrale cu parametru, avem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t)dt =$$

$$\overset{(6.13)}{=} P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, t, z_0)dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, t)dt =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - P(x, y, z_0) = P(x, y, z)$$

Analog, se arată că $\dfrac{\partial V}{\partial y} = Q$ şi $\dfrac{\partial V}{\partial z} = R$.

Deducem de aici, că funcția V a cărei diferențială este cunoscută, se poate determina cu ajutorul unei integrale curbilinii de al doilea tip calculată pe un drum format din segmente paralele cu axele de coordonate.

<u>Exemple:</u> ---

1) Să se calculeze:

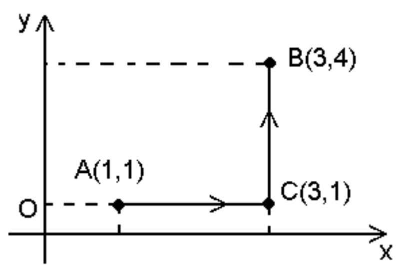
$$I = \int_{\Gamma} e^x \left[\left(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) dx + \left(x^2 + y^2 \right) dy \right]$$

pe o curbă Γ din $\mathbb{R}^2$ a cărei imagine are capetele în punctele $A(1,1)$ şi $B(3,4)$.

Verificăm mai întâi că expresia de sub integrală este o diferențială exactă:

$$\begin{cases} P(x,y) = e^x\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right) \\ Q(x,y) = e^x\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = e^x\left(2x + x^2 + y^2\right) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$



\- Figura 14 -

Alegem $\Gamma = \overline{AC} \cup \overline{CB}$ (figura 14). Reprezentările parametrice ale celor două segmente sunt:

$$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases} \; t \in [1,3] \qquad \overline{CB}: \begin{cases} x = 3 \\ y = t \end{cases} \; t \in [1,4]$$

$$I = \int_{\overline{AC}} e^x\left[\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy\right] +$$

$$+ \int_{\overline{CB}} e^x\left[\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy\right] =$$

$$= \int_1^3 e^t\left(2t + t^2 + \frac{1}{3}\right)dt + \int_1^4 e^3\left(9 + t^2\right)dt = 57e^3 - e$$

2) Să se calculeze:

$$I = \int_\Gamma \frac{xdx + ydy + zdz}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

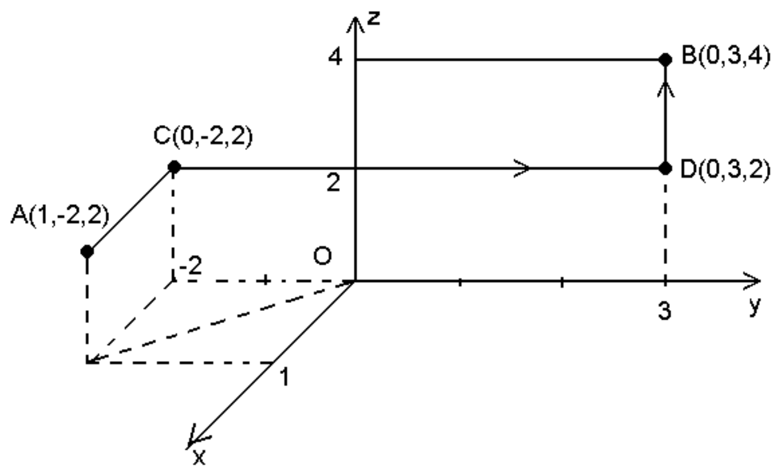
unde Γ este o curbă din $\mathbb{R}^3$ a cărei imagine are capetele în punctele $A(1,-2,2)$ şi $B(0,3,4)$.

În cazul de față:

$$\begin{cases} P(x,y,z) = \dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\ Q(x,y,z) = \dfrac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\ R(x,y,z) = \dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \end{cases}$$

şi constatăm că

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{3xy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = -\dfrac{3yz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = -\dfrac{3xz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{5/2}} \end{cases}$$



- Figura 15 -

Alegem curba Γ formată din segmentele $\Gamma = \overline{AC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DB}$ (figura 15).

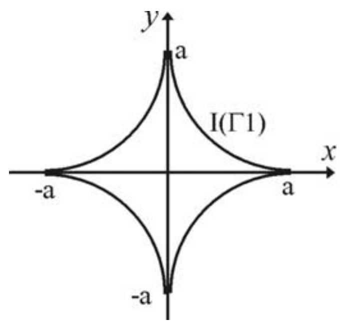
$\overline{AC}: \begin{cases} x = t \\ y = -2 \quad t \in [1,0] \\ z = 2 \end{cases}$, $\overline{CD}: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \quad t \in [-2,3] \\ z = 2 \end{cases}$, $\overline{DB}: \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \quad t \in [2,4] \\ z = t \end{cases}$

$$I=\int_{\overline{AC}}\ldots+\int_{\overline{CD}}\ldots+\int_{\underline{DB}}\ldots=\int_0^1\frac{tdt}{\left(t^2+8\right)^{3/2}}+\int_{-2}^3\frac{tdt}{\left(t^2+4\right)^{3/2}}+\int_2^4\frac{tdt}{\left(t^2+9\right)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{t^2+8}}\bigg|_0^1-\frac{1}{\sqrt{t^2+4}}\bigg|_{-2}^3-\frac{1}{\sqrt{t^2+9}}\bigg|_2^4=\frac{2}{15}$$

9.7. *Exerciții rezolvate*

1) Să se calculeze lungimea astroidei de ecuație $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, $a>0$.



Deoarece astroida este o curbă simetrică față de axele de coordonate, lungimea ei se poate calcula folosind numai porțiunea din primul cadran

$$L=\int_\Gamma dl=4\int_{\Gamma_1}dl$$

Deoarece avem ecuația astroidei, putem folosi o reprezentare parametrică luând ca parametru coordonata x

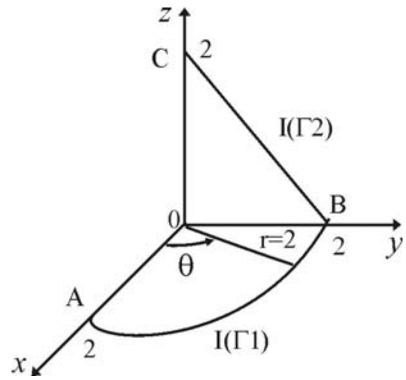
$$\Gamma:\begin{cases}x=x\\ y=\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)^{3/2}\end{cases},\ x\in[0,a] \qquad (7.1)$$

Atunci

$$L=4\int_{\Gamma_1}dl=\int_0^a\sqrt{1+x^{-2/3}\left(a^{2/3}-x^{2/3}\right)}dx=4a^{2/3}\int_0^a x^{-1/3}dx=6a$$

2) Să se calculeze masa unui fir material de densitate $\rho(x,y,z)=|x+y+z|$ care ocupă în $\mathbb{R}^3$ imaginea unei curbe Γ definită astfel

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ unde } \begin{cases} \Gamma_1 : x^2 + y^2 = 4; & x, y \geq 0 \\ \Gamma_2 : y + z = 2; & y, z \geq 0 \end{cases}$$



Masa o calculăm conform formulei:

$$M = \int_{\Gamma} (x + y + z) dl = \int_{\Gamma_1} (x + y + z) dl + \int_{\Gamma_2} (x + y + z) dl$$

Pentru Γ_1 care este un sfert al cercului $x^2 + y^2 = 4$ situat în primul cadran, putem folosi o reprezentare parametrică apelând la coordonatele polare:

$$\Gamma_1 : \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 0 \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \tag{7.2}$$

Pentru Γ_2 care este un segment situat, în planul (YOZ), anume pe dreapta $y + z = 2$, putem da o reprezentare alegând ca parametru variabila z.

$$\Gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - z \\ z = z \end{cases}, \quad z \in [0, 2] \tag{7.3}$$

Atunci

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\cos\theta + \sin\theta)\sqrt{4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}\, d\theta + \int_0^2 2\sqrt{2} dz = 8 + 4\sqrt{2} = 4(2 + \sqrt{2})$$

3) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale unui fir material de densitate $\rho(x,y)=\sqrt{y}$, care este imaginea în $\mathbb{R}^2$ a curbei Γ dată de reprezentarea parametrică

$$\Gamma:\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases},\quad t\in[0,2\pi],\ a>0 \tag{7.4}$$

Coordonatele centrului de greutate le calculăm conform formulelor

$$x_g=\frac{\int\limits_{\Gamma} x\rho(x,y)dl}{\int\limits_{\Gamma}\rho(x,y)dl},\quad y_g=\frac{\int\limits_{\Gamma} y\rho(x,y)dl}{\int\limits_{\Gamma}\rho(x,y)dl} \tag{7.5}$$

Calculăm separat cele trei integrale care intervin în (7.5).

$$\int\limits_{\Gamma}\rho(x,y)dl=\int\limits_{\Gamma}\sqrt{y}dl=\int\limits_{0}^{2\pi}\sqrt{a(1-\cos t)}\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\sqrt{a}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}dt=2\pi a\sqrt{2a}$$

$$\int\limits_{\Gamma}x\rho(x,y)dl=\int\limits_{\Gamma}x\sqrt{y}dl=\int\limits_{0}^{2\pi}a(1-\sin t)\sqrt{a(1-\cos t)}\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=2a^2\sqrt{2a}\int\limits_{0}^{2\pi}(t-\sin t)\sin^2\frac{t}{2}dt=2\pi^2a^2\sqrt{2a}$$

$$\int\limits_{\Gamma}y\rho(x,y)dl=\int\limits_{\Gamma}y\sqrt{y}dl=\int\limits_{0}^{2\pi}a^{3/2}(1-\cos t)^{3/2}\cdot 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=$$

$$=2a^{5/2}\int\limits_{0}^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}dt=12\pi a^2\sqrt{2a}$$

Rezultă $x_g=\pi a$, $y_g=6a$.

4) Să se determine momentul de inerție față de axa OX a unui fir material de densitate $\rho(x,y)=x^2$ care ocupă în $\mathbb{R}^2$ imaginea curbei Γ definită de relațiile

$$\Gamma:\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases},\quad t\in[0,2\pi],\ a>0 \tag{7.6}$$

$$I_{0x} = \int_{\Gamma} y^2 \rho(x,y)dl = \int_{\Gamma} x^2 y^2 dl =$$

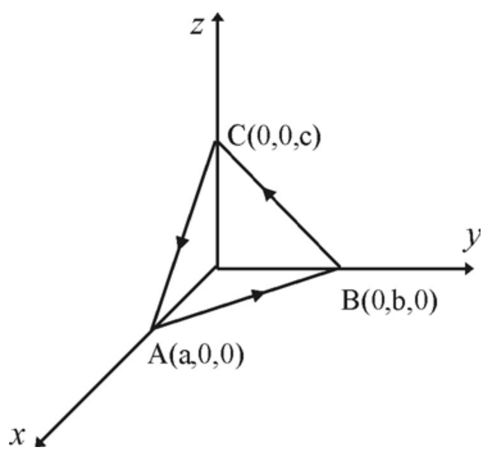
$$= \int_0^{2\pi} a^4 \sin^6 t \cos^6 t \sqrt{\left(3a\cos^2 t \sin t\right)^2 + \left(3a\sin^2 t \cos t\right)^2} dt =$$

$$= 3a^5 \int_0^{2\pi} \sin^6 t \cos^6 t \left|\sin t \cos t\right| dt = \frac{3a^5}{70}$$

5) Să se calculeze:

$$I = \int_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$

unde imaginea în $\mathbb{R}^3$ a curbei Γ este conturul triunghiului ale cărui vârfuri sunt punctele $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$, $a,b,c>0$



Deoarece $\Gamma = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$, integrala o calculăm:

$$\int_{\Gamma} \ldots = \int_{\overline{AB}} \ldots + \int_{\overline{BC}} \ldots + \int_{\overline{CA}} \ldots$$

Căutăm reprezentări parametrice pentru cele trei segmente folosind ecuațiile dreptelor corespunzătoare.

$$\overline{AB}:\begin{cases}x=t\\ y=-\dfrac{b}{a}t+b\\ z=0\end{cases},\quad t\in[a,0];\quad \overline{BC}:\begin{cases}x=0\\ y=t\\ z=-\dfrac{c}{b}t+c\end{cases},\quad t\in[b,0]$$

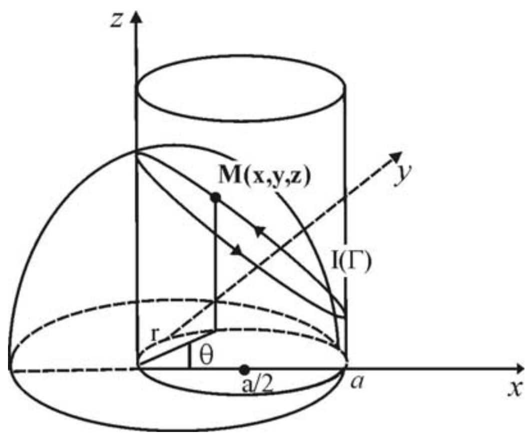
$$\overline{CA}:\begin{cases}x=-\dfrac{a}{c}t+a\\ y=0\\ z=t\end{cases},\quad t\in[c,0];$$

$$I=\int_a^0\left(\frac{b}{a}t-b-\frac{b}{a}t\right)dt+\int_b^0\left(\frac{c}{b}t-c-\frac{c}{b}t\right)dt+\int_c^0\left(\frac{a}{c}t-a-\frac{a}{c}t\right)dt=ab+bc+ac$$

6) Să se calculeze

$$I=\int_\Gamma y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

unde $I(\Gamma)$ se află pe sfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ la intersecția cu cilindrul $x^2+y^2-ax=0$ cu $z\geq 0$.



Putem obține o reprezentaare parametrică a curbei Γ dacă folosim coordonatele cilindrice ale unui punct $M(x,y,z)\in I(\Gamma)$ definite prin:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}\tag{7.7}$$

Impunând condiția ca (7.7) să verifice ecuația sferei şi a cilindrului, obținem pentru Γ reprezentarea parametrică

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos^2\theta \\ y = a\sin\theta\cos\theta, \quad \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ z = a|\sin\theta| \end{cases} \tag{7.8}$$

Atunci:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2\sin^2\theta\cos^2\theta(-2a\cos\theta\sin\theta) + a^2\sin^2\theta\left(a\cos^2\theta - a\sin^2\theta\right) +$$

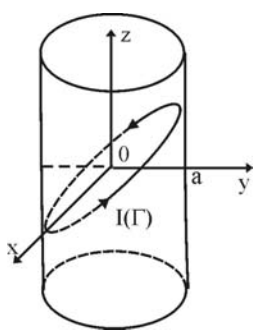
$$+ a^2\cos^4\theta\left(a\frac{|\sin\theta|}{\sin\theta}\cos\theta\right)]d\theta = -2a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta d\theta + a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta -$$

$$-a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta + a^3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\frac{|\sin\theta|}{\sin\theta}d\theta = -\frac{\pi a^3}{4}$$

7) Să se calculeze

$$I = \int_{\Gamma}(y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$$

unde $I(\Gamma)$ este situată la intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul paralel cu axa OY, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$, $h \in \mathbb{R}$



Ca şi în exemplul precedent, folosirea coordonatelor cilindrice, ne conduce la următoarea reprezentare parametrică:

$$\Gamma:\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = h(1-\cos\theta) \end{cases}, \quad \theta \in [0,2\pi] \tag{7.9}$$

Atunci:

$$I = \int_0^{2\pi} [(a\sin\theta - h(1-\cos\theta))(-a\sin\theta) + (h(1-\cos\theta) - a\cos\theta)(a\cos\theta) +$$

$$+(a\cos\theta - a\sin\theta)(h\sin\theta)]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-a^2\sin^2\theta + ah\sin\theta - ah\sin\theta\cos\theta + ah\cos\theta -$$

$$-ah\cos^2\theta - a^2\cos^2\theta + ah\sin\theta\cos\theta - ah\sin^2\theta]d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} [-a^2 - ah + ah\sin\theta + ah\cos\theta + ah\sin\theta\cos\theta]d\theta = -2\pi a(a+h)$$

8) Să se calculeze:

$$I = \int_\Gamma \sqrt{y^2+z^2}dx + \sqrt{z^2+x^2}dy + \sqrt{x^2+y^2}dz$$

unde Γ este segmentul din $\mathbb{R}^3$ a cărui imagine are capetele în punctele $A(-1,-1,-1)$ şi $B(2,2,2)$.

Pe segmentul $\overline{AB}$, evident avem $x = y = z$, deci putem folosi reprezentarea

$$\Gamma:\begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in [-1,2] \\ z = t \end{cases} \tag{7.10}$$

Atunci:

$$I = \int_{-1}^{2} 3\sqrt{2}|t|dt = -3\sqrt{2}\int_{-1}^{0} tdt + 3\sqrt{2}\int_0^2 tdt = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

9) Să se calculeze

$$I = \int_\Gamma \frac{y^2z^2dx + 2x^2zdy + 2x^2ydz}{(2x+yz)^2}$$

unde Γ este o curbă a cărei imagine are capetele în punctele $A(1,1,1)$ şi $B(2,2,2)$ şi nu traversează suprafaţa de ecuaţie $2x + yz = 0$.

Se constată că expresia de sub integrală este o diferenţială exactă şi atunci putem calcula integrala pe segmentul $\overline{AB}$. Reprezentarea parametrică pentru Γ este:

$$\Gamma : \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in [1, 2] \\ z = t \end{cases}$$

Punctele acestui segment nu aparţin suprafeţei $2x + yz = 0$ căci ar trebui ca $2t + t^2 = 0$ deci $t = 0$ şi $t = -2$.

Integrala devine:

$$I = \int_1^2 \frac{t^2 + 4t}{(t+2)^2} dt = \frac{2}{3}$$

CAPITOLUL X

INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ

10.1. Pânze şi suprafețe în $\mathbb{R}^n$

Expunerea o facem pentru $\mathbb{R}^3$, extinderea la un spațiu cu un număr oarecare de dimensiuni putându-se face cu multă uşurință.

Noțiunea de suprafață este un analog bidimensional al noțiunii de curbă. Este, deci, natural ca teoria noțiunilor de suprafață şi de arie a suprafeței să urmeze pas cu pas teoria noțiunilor de curbă şi de lungime a unei curbe..

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact..

Definiție:

Numim pânză în $\mathbb{R}^3$ orice aplicație continuă $s : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$**,** $s = (f, g, h)$

Această aplicație duce un punct $(u, v) \in D$ în punctul $(f(u,v), g(u,v), h(u,v)) \in \mathbb{R}^3$ (figura 1).

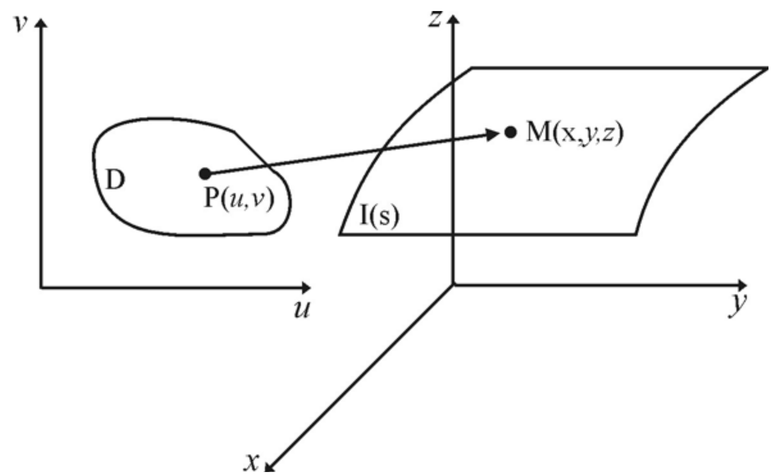
Mulțimea:
$$I(s) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v); (u,v) \in D\}$$

se numeşte imaginea pânzei.

Vom spune că relațiile:

$$s : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \quad (u,v) \in D \\ z = h(u,v) \end{cases} \qquad (1.1)$$

dau reprezentarea parametrică a pânzei.



- Figura 1 -

Fie două puncte distincte (u',v') şi $(u'',v'')\in D$. Dacă $s(u',v')=s(u'',v'')$, atunci spunem că punctul $M(x,y,z)\in I(s)$ determinat de $x=f(u',v')$, $y=g(u',v')$, $z=h(u',v')$ este un <u>punct multiplu al pânzei</u>.

<u>Definiţie</u>:

Pânza s este <u>simplă</u> dacă nu admite nici un punct multiplu.

Pentru pânza determinată de reprezentarea parametrică (1.1), să considerăm următorii determinanţi funcţionali:

$$A=\frac{D(g,h)}{D(u,v)};\ B=\frac{D(h,f)}{D(u,v)};\ A=\frac{D(f,g)}{D(u,v)}; \tag{1.2}$$

<u>Definiţie</u>:

Pânza $s:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ **dată de (1.1) este <u>netedă</u>, dacă** $f,g,h\in C^1(D)$ **şi dacă** $A^2+B^2+C^2\neq 0$ **pe** D**.**

Fie D şi $D'\subset\mathbb{R}^2$ două domenii cumpacte şi pânzele s şi s' definite de următoarele relaţii parametrice:

$$s:\begin{cases}x=f(u,v)\\ y=g(u,v)\\ z=h(u,v)\end{cases}\quad (u,v)\in D;\ s':\begin{cases}x=\varphi(u',v')\\ y=\psi(u',v')\\ z=\theta(u',v')\end{cases}\quad (u',v')\in D' \tag{1.3}$$

Definiție:

Spunem că cele două pânze sunt echivalente (notăm $s \approx s'$) dacă există o funcție continuă şi bijectivă $\omega : D \to D'$, $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ astfel ca

$$s(u,v) = s'[\omega(u,v)],\ (u,v) \in D \tag{1.4}$$

Relația vectorială (1.4) este echivalentă cu relațiile scalare:

$$\begin{cases} f(u,v) = \varphi[\omega_1(u,v), \omega_2(u,v)] \\ g(u,v) = \psi[\omega_1(u,v), \omega_2(u,v)] \\ h(u,v) = \theta[\omega_1(u,v), \omega_2(u,v)] \end{cases} \tag{1.5}$$

Observație:--

Se demonstrează că:
a) Două pânze echivalente au aceeaşi imagine
b) Dacă două pânze sunt echivalente şi una dintre ele este simplă (netedă), atunci şi cealaltă este simplă (netedă).

Definiție:

Numim suprafață în $\mathbb{R}^3$ o clasă de pânze echivalente (o notăm cu S)

Ca şi în cazul curbelor, pentru reprezentarea parametrică a unei suprafețe vom folosi reprezentarea unei pânze din această clasă.

De asemenea, vom numi suprafață simplă (netedă), o clasă de pânze simple (netede) echivalente.

Fie, în continuare, domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ a cărui frontieră, γ, este o curbă simplă, închisă, netedă, sau netedă pe porțiuni. Este cunoscut faptul că un astfel de domeniu din $\mathbb{R}^2$ este un domeniu care are arie.

Presupunem că γ are reprezentarea parametrică:

$$\gamma : \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in [a,b] \tag{1.6}$$

Fie S o suprafață simplă, netedă din $\mathbb{R}^3$ dată de reprezentarea:

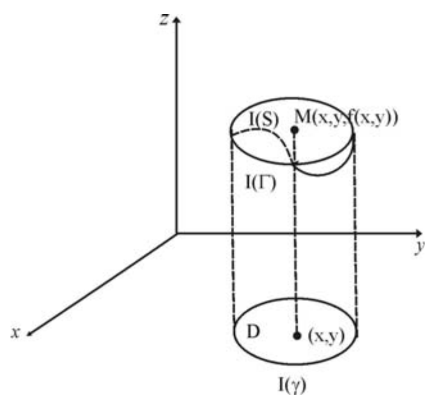
$$S:\begin{cases} x = x \\ y = y \quad\quad , \ (x,y)\in D \\ z = f(x,y) \end{cases} \tag{1.7}$$

Curba Γ din $\mathbb{R}^3$ definită de

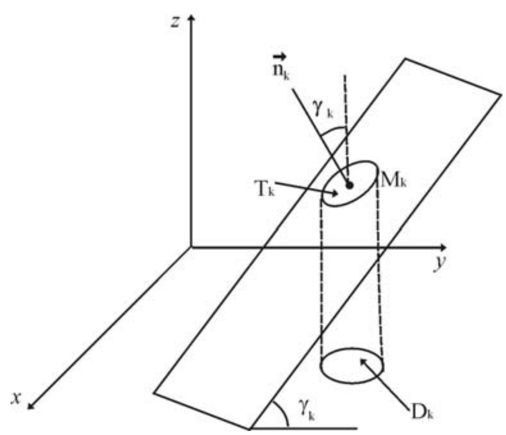
$$\Gamma:\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \quad\quad , \ t\in[a,b] \\ z = f[\varphi(t),\psi(t)] \end{cases} \tag{1.8}$$

o numim <u>bordura lui S</u> şi o notăm bS.

Se constată imediat că Γ este o curbă netedă sau netedă pe porțiuni şi că proiecția în planul XOY a mulțimii $I(\Gamma)$ este $I(\gamma)$ (figura2)



- Figura 2 -



- Figura 3 -

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ a domeniului compact D:

$$\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n) \tag{1.9}$$

unde D_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ sunt domenii compacte cu proprietatea că $\bigcup_{k=1}^{n} D_k = D$;

$\overset{o}{D}_i \cap \overset{o}{D}_j = \Phi$ pentru $i \neq j$.

Fie punctele $(x_k, y_k) \in D_k$ arbitrar alese şi $M_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k)) \in I(S)$.

Prin punctul M_k ducem planul tangent π_k la suprafața S şi considerăm cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_k şi generatoarea paralelă cu axa OZ. Acest cilindru determină pe planul tangent π_k un domeniu T_k (figura 3) cu prporietatea că $D_k = pr_{(XOY)} T_k$.

Dacă notăm:

$$\gamma_k = (\pi_k, (XOY)) = \left(\vec{n}_k, OZ\right) \tag{1.10}$$

unde $\vec{n}_k$ este normala la suprafața S în punctul M_k, atunci putem spune că:

$$\text{aria}D_k = \text{aria}T_k \cdot \cos\gamma_k \tag{1.11}$$

Putem afirma că folosind diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ am determinat o suprafață poliedrală:

$$\Omega_\Delta = \bigcup_{k=1}^{n} T_k \tag{1.12}$$

a cărei arie este

$$\text{aria}\Omega_\Delta = \sum_{k=1}^{n} \text{aria}T_k \tag{1.13}$$

Să considerăm un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$, $\Delta_n \in \mathcal{D}(D)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$. În felul acesta, formăm şirul de numere pozitive $\left(\text{aria}\Omega_{\Delta_n}\right)_{n\in N}$.

<u>Definiție</u>:

Spunem că <u>suprafața S are arie</u> dacă şirul $\left(\text{aria}\Omega_{\Delta_n}\right)_{n\in N}$ este mărginit superior. Limita superioară a acestui şir se numeşte <u>aria suprafeței S</u>.

$$\text{aria}S = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\text{aria}\Omega_{\Delta_n}\right) \tag{1.14}$$

Observație:--

Suprafața S are arie dacă toate pânzele din care este ea formată au arie. Valoarea comună a ariilor acestor pânze, este aria suprafeței (ca şi în cazul drumurilor, se demonstrează că două pânze echivalente au aceeaşi arie).

Teoremă:

Dacă S este o suprafață în $\mathbb{R}^3$ netedă, dată de reprezentarea:

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y)\in D$$

unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact cu frontiera netedă sau netedă pe porțiuni, atunci suprafața S are arie şi

$$\boxed{\text{aria}S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy} \qquad (1.15)$$

unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ şi $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Demonstrație:

Fie un punct $M(x,y,f(x,y)) \in I(S)$ şi $\vec{r}$ vectorul său de poziție definit de:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k} \qquad (1.16)$$

Este cunoscut faptul că normala la suprafața S în punctul $M(x,y,f(x,y))$ este dată de:

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \end{vmatrix} = -p\vec{i} - q\vec{j} + \vec{k} \qquad (1.17)$$

Dacă $\gamma = \left(\widehat{\vec{n},OZ}\right) = \left(\widehat{\vec{n},\vec{k}}\right)$, atunci:

$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}\cdot\vec{k}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}} \qquad (1.18)$$

Cum pentru diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ considerată, am notat cu $\gamma_k = \left(\overrightarrow{n_k}, OZ\right)$, putem afirma că:

$$\boxed{\cos\gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}}} \tag{1.19}$$

unde $p_k = \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k)$ şi $q_k = \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k)$

Conform relației (1.11) reținem că:

$$\boxed{ariaD_k = \frac{1}{\sqrt{1+p_k^2+q_k^2}} ariaT_k} \tag{1.20}$$

şi avem

$$aria\Omega_\Delta = \sum_{k=1}^{n} ariaT_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+p_k^2+q_k^2}\, ariaD_k = \sigma_\Delta(F,(x_k, y_k)) \tag{1.21}$$

În membrul drept al ultimei egalități avem o sumă Riemann a funcției $F(x,y) = \sqrt{1+p^2+q^2}$ relativ la diviziunea $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ şi la punctele arbitrar alese $(x_k, y_k) \in D_k$. Deoarece F este continuă pe D (compunere de funcții continue), rezultă că F este integrabilă pe D.

Considerând un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, prin trecere la limită în (1.21) avem

$$ariaS = \lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(F,\left(x_k^n, y_k^n\right)\right) = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy$$

deci

$$\boxed{ariaS = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy}$$

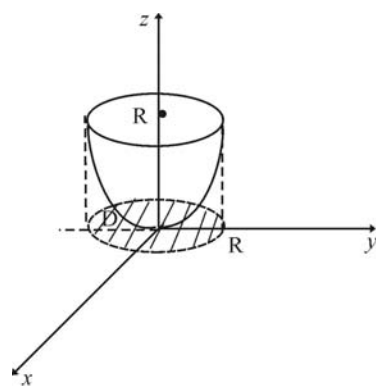
Exemplu: --

Să se calculeze aria suprafeței dată de reprezentarea parametrică:

$$D:\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad (x,y)\in D$$

unde $D = \left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le \mathbb{R}^2\right\}$

Suprafață este situată pe un paraboloid şi este delimitată de planul $z = R$.



Domeniul D este discul centrat în origine de rază R.

$$\text{aria}S = \iint_D \sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1+4r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{6}\left[\left(1+4R^2\right)^{3/2} - 1\right]$$

În cele ce urmează, vom da o altă formă integralei (1.15) apelând la o transformare regulată definită prin:

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D^* \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.22}$$

unde $\varphi, \psi \in C^1(D^*)$, $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \ne 0$ pe D^*.

Folosind (1.22), pentru suprafața S obținem reprezentarea parametrică

$$S:\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=f[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \end{cases} \qquad (u,v)\in D^* \tag{1.23}$$

Calculăm:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial \psi}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

sau mai putem scrie:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \tag{1.24}$$

Din sistemul liniar (1.24) deducem:

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\dfrac{D(z,y)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}=p; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\dfrac{D(x,z)}{D(u,v)}}{\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}}=q \tag{1.25}$$

Făcând schimbarea de variabile (1.22) în integrala (1.15) obținem:

$$\text{aria}S=\iint_D\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy=\iint_{D^*}\sqrt{\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2+\left[\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right]^2}\,dudv=$$

$$=\iint_{D^*}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv$$

Prin urmare, dacă suprafața netedă S este dată de reprezentarea:

$$S:\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \\ z=\theta(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D^* \tag{1.29}$$

atunci

$$\boxed{\text{aria}S=\iint_{D^*}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,dudv} \tag{1.30}$$

unde am notat

$$\begin{aligned} A &= \frac{D(\psi,\theta)}{D(u,v)} \\ B &= \frac{D(\theta,\varphi)}{D(u,v)} \qquad (1.31) \\ C &= \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \end{aligned}$$

10.2. Integrala de surprafață de primul tip

Să considerăm o suprafață din $\mathbb{R}^3$ netedă, dată de reprezentarea parametrică:

$$S:\begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \quad (u,v)\in D \\ z = h(u,v) \end{cases} \qquad (2.1)$$

unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact care are arie (frontiera lui este o curbă simplă, netedă sau netedă pe porțiuni).

Fie o funcție $F : I(S) \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, funcție continuă pe această mulțime.

Considerăm o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(D)$, definită prin $\Delta = (D_1, D_2, ..., D_n)$ cu D_k compacte astfel ca $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k = D$ şi $\overset{\circ}{D}_i \cap \overset{\circ}{D}_j = \Phi$ pentru $i \neq j$.

Conform relațiilor (2.1) fiecărui domeniu compact D_k îi corespunde o porțiune S_k din S.

De asemenea, fiecărui punct $(u_k, v_k) \in D_k$ îi corespunde punctul $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in I(S_k)$ definit de relațiile:

$$\begin{cases} \xi_k = f(u_k, v_k) \\ \eta_k = g(u_k, v_k) \\ \zeta_k = h(u_k, v_k) \end{cases} \qquad (2.2)$$

Formăm suma Riemann:

$$\boxed{\sigma_\Delta(F,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)) = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\cdot \text{aria} S_k} \tag{2.3}$$

<u>Definiție</u>:

Funcția F <u>este</u> <u>integrabilă</u> <u>pe</u> <u>suprafața</u> <u>netedă</u> S, dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ şi orice alegere a punctelor $(u_k, v_k) \in D_k$ să avem:

$$|\sigma_\Delta(F,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)) - I| < \varepsilon \tag{2.4}$$

În acest caz, numărul I se notează

$$\boxed{I = \iint_S F(x,y,z)d\sigma} \tag{2.5}$$

şi se numeşte integrala funcției F pe suprafața S.

<u>Observații</u>:--

a) Dacă presupunem că S este o suprafață materială, iar F este funcția densitate, atunci integrala (2.5) dă masa suprafeței materiale.
Dacă F ar reprezenta densitatea de repartiție a unei sarcini electrice, atunci (2.5) ar da sarcina electrică totală distribuită pe suprafața materială.

b) Dacă considerăm un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$, $\Delta_n \in \mathcal{D}(D)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0$, atunci integrabilitatea funcției F pe suprafața S este asigurată dacă există şi este finită limita:
$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}\left(F,\left(\xi_k^n,\eta_k^n,\zeta_k^n\right)\right)$

În legătură cu calculul integralei de suprafață de primul tip, demonstrăm următoarea:

Teoremă:

Dacă S este o suprafață netedă dată de reprezentarea (2.1) şi dacă pentru funcția $F : I(S) \to \mathbb{R}$ există integralele:

$$I_1 = \iint_S F(x,y,z)d\sigma \quad \text{şi}$$

$$I_2 = \iint_D F[f(u,v),g(u,v),h(u,v)]\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}dudv$$

atunci $I_1 = I_2$.

Demonstrație:

Egalitatea integralelor va rezulta din egalitatea sumelor Riemann corespunzătoare:

Din (1.30) putem scrie că:

$$ariaS_k = \iint_{D_k} \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)}dudv$$

şi pentru că integrantul este funcție continuă, putem folosi o formulă de medie pentru integrala dublă, deci există $(u_k, v_k) \in D_k$ astfel ca:

$$ariaS_k = \sqrt{A^2(u_k,v_k) + B^2(u_k,v_k) + C^2(u_k,v_k)} \cdot ariaD_k \tag{2.6}$$

Notăm:

$$\begin{cases} \xi_k = f(u_k, v_k) \\ \eta_k = g(u_k, v_k) \\ \zeta_k = h(u_k, v_k) \end{cases} \tag{2.7}$$

şi calculăm suma Riemann:

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta(F,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)) &= \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) \cdot ariaS_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n} F(u_k,v_k) \cdot \sqrt{A^2(u_k,v_k) + B^2(u_k,v_k) + C^2(u_k,v_k)} \cdot ariaD_k = \\ &= \sigma_D(H,(u_k,v_k)) \end{aligned} \tag{2.8}$$

unde funcția $H : D \to \mathbb{R}$ este:

$$H(u,v) = F(u,v) \cdot \sqrt{A^2(u,v) + B^2(u,v) + C^2(u,v)} \tag{2.9}$$

Deoarece am presupus existența celor două integrale, iar egalitatea

$$\sigma_{\Delta}(F,(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)) = \sigma_{\Delta}(H,(u_k,v_k)) \tag{2.10}$$

se păstrează prin trecere la limită, rezultă egalitatea celor două integrale:

$$\boxed{\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \iint_D F(u,v)\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv} \tag{2.11}$$

Observație:--

Dacă suprafață S are reprezentarea (1.7), atunci (2.11) devine:

$$\boxed{\iint_S F(x,y,z)d\sigma = \iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy} \tag{2.12}$$

Aplicații ale integralei de suprafață de primul tip

1) Calculul ariei unei suprafețe S

$$\boxed{\text{aria}S = \iint_S d\sigma} \tag{2.13}$$

2) Determinarea masei unei suprafețe materiale de densitate ρ.

$$\boxed{M = \iint_S \rho(x,y,z)d\sigma} \tag{2.14}$$

3) Determinarea coordonatelor centrului de greutate.

$$\boxed{\begin{aligned} x_g &= \frac{1}{M}\iint_S x\rho(x,y,z)d\sigma \\ y_g &= \frac{1}{M}\iint_S y\rho(x,y,z)d\sigma \\ z_g &= \frac{1}{M}\iint_S z\rho(x,y,z)d\sigma \end{aligned}} \tag{2.15}$$

4) Determinarea momentelor de inerție:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{0X} &= \iint_S \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma \\ I_{X0Y} &= \iint_S z^2\rho(x,y,z)d\sigma \\ I_0 &= \iint_S \left(x^2+y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)d\sigma \end{aligned}} \tag{2.16}$$

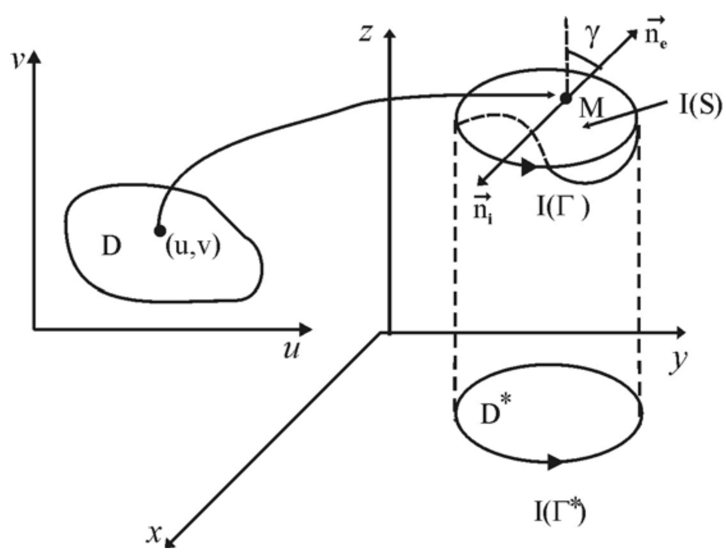
Prin analogie, se pot scrie şi expresiile momentelor de inerție fața de celelalte axe sau plane de coordonate.

10.3. Integrala de surprafață de al doilea tip

Fie o suprafață din $\mathbb{R}^3$, netedă, dată de reprezentarea parametrică:

$$S:\begin{cases} x=f(u,v) \\ y=g(u,v) & (u,v)\in D \\ z=h(u,v) \end{cases} \tag{3.1}$$

şi notăm cu $D^*\subset\mathbb{R}^2$, proiecția în planul (XOY) a acestei suprafețe (figura 4).



- Figura 4 -

Notăm $bS=\Gamma$ şi $\partial D^*=\Gamma^*$.

<u>Definiție</u>:

Numim <u>față</u> <u>exterioară</u> (superioară sau pozitivă) a suprafeței S față de planul (XOY), fața pentru care vectorul normală face cu axa OZ un unghi $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$. Pentru acestă față, avem vectroul $\vec{n_e}$ numit <u>normală</u> <u>exterioară</u>.

<u>Definiție</u>:

Numim <u>față</u> <u>interioară</u> (inferioară sau negativă) a suprafeței S față de planul (XOY), fața pentru care vectorul normală face cu axa OZ un unghi $\gamma > \dfrac{\pi}{2}$. Pentru acestă față, avem vectroul $\vec{n_i}$ numit <u>normală</u> <u>interioară</u>.

Pe bordura Γ a suprafeței S putem defini două sensuri de parcurgere:

a) <u>Sensul</u> <u>direct</u>, sau sensul asociat feței exterioare a lui S, este sensul ce corespunde sensului direct pe Γ^* (figura 4).

b) <u>Sensul</u> <u>invers</u>, sau sensul asociat feței interioare a lui S, este sensul ce corespunde sensului invers pe Γ^*.

Astfel, în primul caz spunem că <u>suprafața S este orientată pozitiv</u> față de planul (XOY), iar în al doilea caz, că suprafața <u>S este orientată negativ</u> față de planul (XOY).

Fie o diviziune $\Delta \in \mathcal{D}(D)$

$$\Delta \in (D_1, D_2, ..., D_n),\ \bigcup_{k=1}^{n} D_k = D,\ \overset{o}{D}_i \cap \overset{o}{D}_j = \Phi \text{ pentru } i \neq j \tag{3.2}$$

Fiecărui compact $D_k \subset D$, prin relațiile (3.1) îi corespunde o porțiune S_k din S.

De asemenea, putem afirma că diviziunii $\Delta \in \mathcal{D}(D)$ definite îi corespunde o diviziune $\Delta^* \in \mathcal{D}(D^*)$

$$\Delta^* \in (D_1^*, D_2^*, ..., D_n^*),\ \bigcup_{k=1}^{n} D_k^* = D^*,\ \overset{o}{D}_i^* \cap \overset{o}{D}_j^* = \Phi \text{ pentru } i \neq j \tag{3.3}$$

astfel că

$$D_k{}^* = pr_{XOY} S_k \tag{3.4}$$

şi

$$\boxed{ariaD_k{}^* = ariaS_k \cos\gamma_k} \tag{3.5}$$

Pentru o funcţie continuă $R : I(S) \to \mathbb{R}$, şi un punct arbitrar ales, $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in I(S_k)$ formăm suma Riemann:

$$\sigma_{\Delta^*}(R, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)) = \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot ariaD_k{}^* =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \cdot \cos\gamma_k \cdot ariaS_k = \sigma_\Delta(R\cos\gamma, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k))$$

Reţinem egalitatea:

$$\boxed{\sigma_{\Delta^*}(R, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)) = \sigma_\Delta(R\cos\gamma, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k))} \tag{3.6}$$

Putem face observaţia că pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in N}$, $\Delta_n \in \mathcal{D}(D)$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$, pentru şirul de diviziuni corespunzător, $(\Delta_n{}^*)_{n\in N}$, $\Delta_n{}^* \in \mathcal{D}(D^*)$, avem $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Delta_n{}^*\| = 0$.

Definiţie:
Funcţia R este integrabilă pe suprafaţa S în raport cu coordonatele x şi y, dacă există un număr $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca pentru orice diviziune $\Delta^* = \mathcal{D}(D^*)$ cu proprietatea $\|\Delta^*\| < \delta_\varepsilon$ şi pentru orice alegere $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in I(S_k)$ avem:

$$|\sigma_{\Delta^*}(R, (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)) - I| < \varepsilon \tag{3.7}$$

În acest caz, notăm

$$\boxed{I = \iint_S R(x, y, z)\,dxdy} \tag{3.8}$$

şi o numim integrala de suprafaţa a funcţiei R în raport cu x şi y.

Observație:---

Pentru şirul de diviziuni $(\Delta_n{}^*)_{n\in N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Delta_n{}^*\| = 0$, condiția (3.7) revine la a spune că există şi este finită limita:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_{\Delta_n{}^*}\left(R,\left(\xi_k^n,\eta_k^n,\zeta_k^n\right)\right) = I$$

În această situație, dacă ținem seama de (3.6) putem spune că există şi limita sumei din dreapta care ne conduce la o integrală de suprafața de primul tip.

Astfel, obținem:

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = \iint_S R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma \tag{3.9}$$

Se mai pot obține două rezultate asemănătoare lui (3.9) considerând, pe rând, suprafața S proiectabilă în planul (YOZ) şi apoi proiectabilă în planul (XOZ), folosind funcțiile continue P şi $Q : I(S) \to \mathbb{R}$. Obținem:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz = \iint_S P(x,y,z)\cos\alpha d\sigma \tag{3.10}$$

$$\iint_S Q(x,y,z)dxdz = \iint_S Q(x,y,z)\cos\beta d\sigma \tag{3.11}$$

unde $\alpha = (\vec{n}, OX)$ şi $\beta = (\vec{n}, OY)$.

Dacă presupunem că suprafața netedă S se poate proiecta în cele trei plane de coordonate, pentru o funcție vectorială $\vec{F} : I(S) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = [P, Q, R]$, putem defini <u>integrala</u> <u>de</u> <u>suprafață</u> <u>de</u> <u>al</u> <u>doilea</u> <u>tip</u> (integrala în raport cu coordonatele), notată

$$\boxed{\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_S \vec{F}d\vec{\tau}} \tag{3.12}$$

unde am notat $d\vec{\tau} = [dydz, dxdz, dxdy]$

Prin adunarea relațiilor (3.9), (3.10) şi (3.11) obținem:

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \iint_S [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]d\sigma \tag{3.13}$$

Această relație o putem scrie vectorial mai spimlu, dacă notăm $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$$\boxed{\iint_S \vec{F}d\vec{\tau} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}d\sigma} \tag{3.14}$$

<u>Observații</u>:--

a) Integrala de suprafață de al doilea tip depinde de fața suprafeței pe care se face integrarea

b) Relația (3.14) ne precizează că o integrală de suprafață de al doilea tip se calculează cu ajutorul unei integrale de suprafață de primul tip.

--

În cele ce urmează, vom da formulele pentru calculul cosinusurilor directoare ale normalei la suprafață.

*) Dacă suprafață S este dată de reprezentarea parametrică:

$$s: \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

se demonstrează că:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{cases} \tag{3.15}$$

Alegerea semnului se face în funcție de fața suprafeței pe care se face integrarea, iar A, B, C sunt determinanții funcționali pe care i-am definit la început.

**) Dacă suprafața S este dată de reprezentarea parametrică:

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y)\in D$$

se demonstrează că:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{-1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases} \tag{3.16}$$

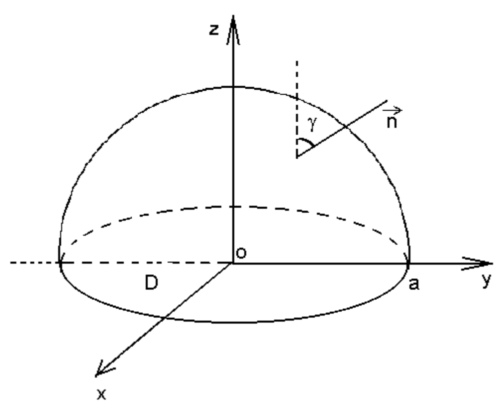
unde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

<u>Exemplu:</u> --

Să se calculeze:

$$\iint_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy$$

unde S este fața superioară față de planul (XOY) a emisferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\geq 0)$



Pentru această emisferă folosim reprezentarea:

$$S:\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \qquad (x,y)\in D \qquad (3.17)$$

unde $D = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le a^2\}$

Deoarece pe fața superioară față de planul (XOY), $\gamma < \frac{\pi}{2}$, deci $\cos\gamma > 0$, pentru componentele normalei $\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$, folosim formulele:

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{p}{-\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\beta &= \frac{q}{-\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{-1}{-\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{aligned} \qquad (3.18)$$

Cum $p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ şi $q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

Obținem: $\cos\alpha = \frac{x}{a}$, $\cos\beta = \frac{y}{a}$ şi $\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}$

Având în vedere (3.14), integrala de față devine:

$$I = \iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy = \frac{1}{a}\iint_S \left(x^3 + y^3 + z^2\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right) d\sigma$$

În continuare folosim (2.12) pentru a trece de la integrala de suprafață la cea dublă.

$$I = \iint_D \left[x^3 + y^3 + \left(a^2 - x^2 - y^2\right)^{3/2}\right]\cdot \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[r^3\cos^3\theta + r^3\sin^3\theta - \left(a^2 - r^2\right)^{3/2}\right]\cdot \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \frac{\pi a^4}{2}$$

Pentru D am folosit reprezentarea în coordonate polare:

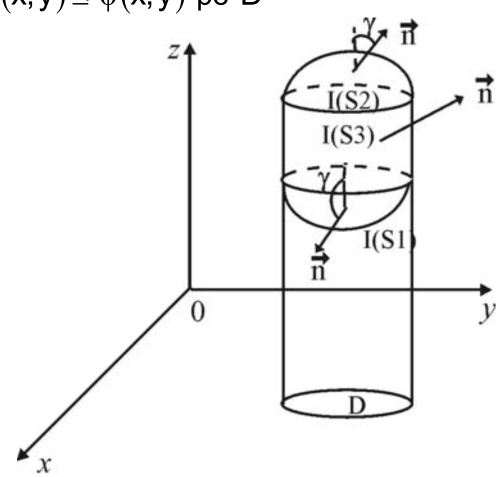
$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,a] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

10.4. Formula Gauss – Ostrogradski

Vom pune în evidență o legătură între integrala triplă şi integrala de suprafață pentru cazul unui domeniu compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ care are ca frontieră o suprafață închisă simplă, netedă sau netedă pe porțiuni. Pentru simplitate, considerăm cazul domeniilor simple.

Fie, pentru început, un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ simplu fața de axa OZ, definit de:

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D, z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\} \quad \text{unde} \quad (4.1)$$
$$\varphi, \psi \in C^0(D),\ \varphi(x,y) \le \psi(x,y) \text{ pe } D$$



- Figura 5 -

Frontiera domeniului Ω este suprafața închisă $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ pentru care

$$\begin{cases} I(S_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D, z = \varphi(x,y)\} \\ I(S_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in D, z = \psi(x,y)\} \\ I(S_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in \partial D, z \in [\varphi(x,y), \psi(x,y)]\} \end{cases} \quad (4.2)$$

Propoziția 1:

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu față de axa OZ cu frontiera o suprafață netedă, dacă funcția $R:\Omega \to \mathbb{R}$ are proprietatea că R şi $\frac{\partial R}{\partial z}$ sunt continue pe Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz = \iint_{S} R(x,y,z)dxdy} \tag{4.3}$$

unde fața pe care se calculează integrala de suprafață este precizată prin normele corespunzătoare. (figura 5).

Demonstrație:

Calculăm:

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dxdydz = \iint_{D} dxdy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)dz = \\ &= \iint_{D} \left[R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))\right]dxdy \end{aligned} \tag{4.4}$$

Calculăm:

$$\begin{aligned} &\iint_{S} R(x,y,z)dxdy = \iint_{S_1} \ldots + \iint_{S_2} \ldots + \iint_{S_3} \ldots = \iint_{S_1} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \\ &+ \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma + \iint_{S_3} R(x,y,z)\cos\gamma d\sigma \end{aligned}$$

Pe suprafața S_1, $\gamma > \frac{\pi}{2}$ deci $\cos\gamma < 0$ şi avem

$$\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}.$$

Pe suprafața S_2, $\gamma < \frac{\pi}{2}$ deci $\cos\gamma > 0$ şi avem

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2}}.$$

Pe suprafața $\underline{S_3}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ deci $\cos\gamma = 0$.

Atunci :

$$\iint_S R(x,y,z)dxdy = -\iint_{S_1} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}d\sigma +$$

$$+\iint_{S_2} \frac{R(x,y,z)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2}}d\sigma = -\iint_D R(x,y,\varphi(x,y))dxdy + \qquad (4.5)$$

$$+\iint_D R(x,y,\psi(x,y))dxdy = \iint_D [R(x,y,\psi(x,y)) - R(x,y,\varphi(x,y))]dxdy$$

Din (4.4) şi (4.5) rezultă egalitatea (4.3).

În mod cu totul asemănător se demonstrează:

Propoziția 2:

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu fața de axa OX, frontiera sa fiind netedă şi dacă P şi $\frac{\partial P}{\partial x}$ sunt definite şi continue pe Ω, atunci:

$$\boxed{\iiint_\Omega \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint_S P(x,y,z)dydz} \qquad (4.6)$$

Propoziția 3:

Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu simplu fața de axa OY, frontiera sa fiind netedă şi dacă Q şi $\frac{\partial Q}{\partial y}$ sunt definite şi continue pe Ω, atunci:

$$\boxed{\iiint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint_S Q(x,y,z)dxdz} \qquad (4.7)$$

Bazându-ne pe aceste trei rezultate, putem enunța următoarea:

Teoremă:

Dacă domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este simplu fața de axele de coordonate, iar frontiera sa este o suprafață închisă netedă sau netedă pe porțiuni şi dacă funcția $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} : [P, Q, R]$ are proprietatea că P, Q, R $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ sunt continue pe Ω, atunci are loc egalitatea:

$$\boxed{\begin{aligned}&\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\right]dxdydz=\\&=\iint_{S}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dxdz+R(x,y,z)dxdy\end{aligned}} \tag{4.8}$$

(4.8) se numeşte formula Gauss–Ostrogradski.

Observații:---

1) Formula (4.8) se scrie mai simplu sub formă vectorială dacă notăm:
$d\vec{\tau} = [dydz, dxdz, dxdy]$

$\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$$\boxed{\iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}dxdydz = \iint_{S} \vec{F}d\tau = \iint_{S} \vec{F}\vec{n}d\sigma} \tag{4.9}$$

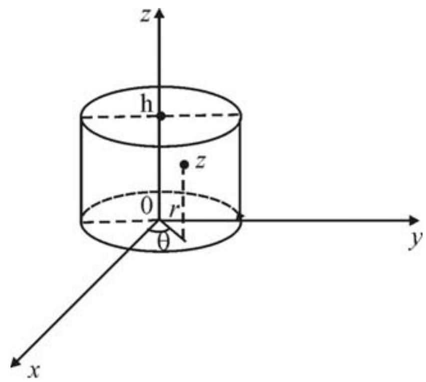
2) (4.9) se mai numeşte formula flux–divergență deoarece integrala $\iint_{S} \vec{F}\vec{n}d\sigma$ defineşte fluxul câmpului determinat de funcția vectorială $\vec{F}$ prin suprafața S.

Exemplu: ---

Să se calculeze integrala

$$I = \iint_{S} x^3 dydz + x^2 ydxdz + x^2 zdxdy$$

unde S este o suprafața închisă determinată de cilindrul de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$ şi planele $z = 0$ şi $z = h$.



Dacă aplicăm formula Gauss-Ostrogradski avem:

$$I = 5\iiint_{\Omega} x^2 dxdydz$$

Pentru calculul acestei integrale triple putem folosi coordonatele cilindrice:

$$\Omega : \begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,a] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \\ z = z & z \in [0,h] \end{cases} \qquad (4.10)$$

Atunci:

$$I = 5\int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^h dz = \frac{5\pi h a^4}{4}.$$

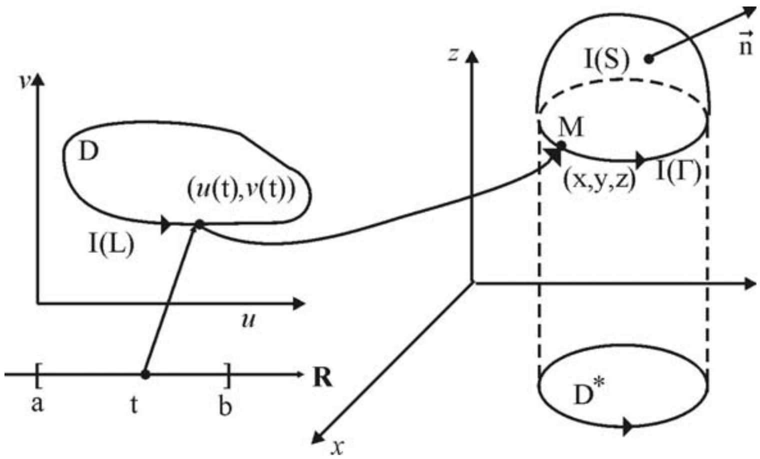
-- 🕮

10.5. Formula lui Stokes

Această formulă stabileşte o legătură între integrala curbilinie în spaţiu şi integrala de suprafaţa.

Fie o suprafaţă S din $\mathbb{R}^3$ netedă, orientată pozitiv fată de planul (XOY) a cărei reprezentare parametrică este:

$$S : \begin{cases} x = f(u,v) \\ y = g(u,v) \\ z = h(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in D \qquad (5.1)$$



\- Figura 6 -

Notăm:
$L = \partial D$ (frontiera lui D)
$\Gamma = bS$ (frontiera lui S)

Dacă L are reprezentarea parametrică:

$$L:\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{5.2}$$

atunci pentru Γ putem folosi reprezentarea:

$$\Gamma:\begin{cases} x = f[u(t),v(t)] \\ y = g[u(t),v(t)] \\ z = h[u(t),v(t)] \end{cases} \qquad t \in [a,b] \tag{5.3}$$

Teoremă:

Dacă S este o suprafață netedă din $\mathbb{R}^3$ orientată pozitiv fată de planul (XOY) dată de reprezentarea (5.1), cu $f,g,h \in C^2(D)$, şi dacă funcția $\vec{F} : I(S) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in C^1(I(S))$, $\vec{F} = [P,Q,R]$, atunci are loc egalitatea:

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} P dx + Q dy + R dz = \iint_{S^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy} \tag{5.4}$$

unde S^+ este fața exterioară fată de planul (XOY) a suprafeței S.

(5.4) se numeşte formula lui Stokes.

Demonstrație:

Demonstrația constă în trecerea succesivă prin următoarele tipuri de integrale:

$$\int_{\Gamma^+} \to \int_{\partial D^+} \to \iint_D \to \iint_{S^+}$$

Calculăm mai întâi:

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)dx \overset{(5.3)}{=} \int_a^b P[u(t),v(t)]\left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right]dt =$$

$$\overset{(5.2)}{=} \int_L P(u,v)\left[\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv\right] \overset{f.Green}{=} \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial f}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right]dudv =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}+P\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}-P\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right]dudv =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right]dudv = \iint_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v}-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u}\right]dudv = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u}\right)\right]dudv = \iint_D \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{D(f,g)}{D(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{D(h,f)}{D(u,v)}\right]dudv =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}B-\frac{\partial P}{\partial y}C\right]dudv = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\sqrt{A^2+B^2+C^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\sqrt{A^2+B^2+C^2}\right]dudv = \iint_S \left[\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right]d\sigma =$$

$$= \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

Astfel obținem:

$$\int_{\Gamma^+} P(x,y,z)dx = \iint_{S^+} \frac{\partial P}{\partial z}dxdz-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy \tag{5.5}$$

Printr-un calcul asemănător, deducem că

$$\int_{\Gamma^+} Q(x,y,z)dy = \iint_{S^+} \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy-\frac{\partial Q}{\partial z}dydz \tag{5.6}$$

$$\int_{\Gamma^+} R(x,y,z)dz = \iint_{S^+} \frac{\partial R}{\partial y} dydz - \frac{\partial R}{\partial x} dxdz \tag{5.7}$$

Prin adunarea relațiilor (5.5), (5.6) şi (5.7) obținem formula lui Stokes (5.4)

Observații:---

1) Formula (5.4) se scrie vectorial mai simplu dacă notăm:

$d\vec{r} = [dx, dy, dz]$

$d\vec{\tau} = [dydz, dxdz, dxdy]$

$\vec{n} = [\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$

$$\boxed{\int_{\Gamma^+} \vec{F} d\vec{r} = \iint_{S^+} \text{rot}\vec{F} \cdot d\vec{\tau} = \iint_{S^+} \text{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma} \tag{5.8}$$

2) Dacă S este o suprafață plană, atunci formula Stokes se transformă în formula lui Green

Într-adevăr, în acest caz

$S \to D^*$

$\Gamma \to \partial D^*$

$\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{2}, \gamma = 0$

$\vec{F} = [P, Q]$

şi din (5.8) obținem:

$$\int_{\partial D^*} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \tag{5.9}$$

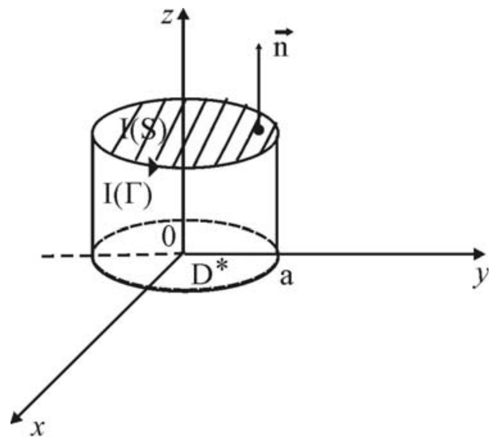
--- 

Exemplu: ---

Folosind formula lui Stokes, să se calculeze:

$$I = \int_{\Gamma} -\frac{y^3 z^2}{3} dx + \left(\frac{x^3 z}{3} + 2 \right) dy + xyzdz$$

unde Γ este curba situată la intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $z = 1$, parcursă în sens direct.



În cazul de față:

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{y^3z^2}{3}\vec{i} + \left(\frac{x^3z}{3} + 2\right)\vec{j} + xyz\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(xz - \frac{x^3}{3}\right)\vec{i} + \left(-\frac{2y^3z}{3} - yz\right)\vec{j} + \left(x^2z + y^2z^2\right)\vec{k} \quad (5.10)$$

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0 \text{, deci } \vec{n} = [0,0,1] \quad (5.11)$$

Conform formulei (5.8) obținem:

$$I = \iint_S \left(x^2z + y^2z^2\right)d\sigma = \iint_{D^*}\left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

deoarece suprafața S se află în planul $z = 1$.

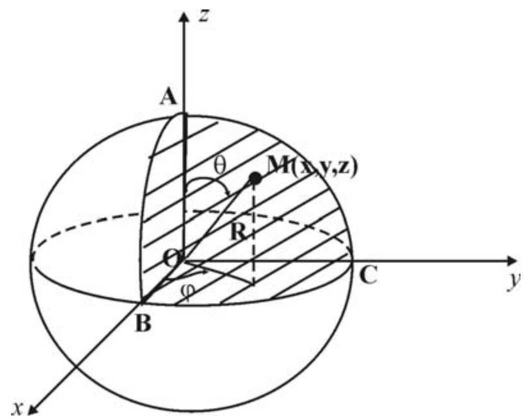
Folosind coordonatele polare pentru calculul integralei duble, obținem:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}$$

-- 📖

10.6. Exerciții rezolvate

1) Să se determine aria sferei de rază R.



$$A_{\text{sferă}} = \iint_S d\sigma = 8\iint_{S_1} d\sigma$$

unde S_1 este o optime din sfera (luăm ABC).

Vom da o reprezentare parametrică a suprafeței S_1 folosind coordonatele sferice:

$$S_1 = \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases} \quad (\theta,\varphi)\in D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

Atunci $A_{\text{sferă}} = 8\iint_{S_1} d\sigma = 8\iint_D \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\theta d\varphi$

$$A = \frac{D(y,z)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} R\cos\theta\sin\varphi & -R\sin\theta \\ R\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = R^2\sin^2\theta\cos\varphi$$

$$B = \frac{D(z,x)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} -R\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ 0 & -R\sin\theta\sin\varphi \end{vmatrix} = R^2\sin^2\theta\sin\varphi$$

$$C = \frac{D(x,y)}{D(\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\sin\theta\cos\varphi \end{vmatrix} = R^2\sin\theta\cos\varphi$$

$$A^2+B^2+C^2=R^2\sin\theta$$

Atunci:

$$A_{\text{sferă}}=8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta=4\pi R^2$$

2) Să se calculeze integrala

$$I=\iint_S\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}d\sigma$$

unde S este elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Apelând la coordonatele sferice generalizate, pentru suprafața S folosim reprezentarea

$$S:\begin{cases}x=a\sin\theta\cos\varphi\\ y=b\sin\theta\sin\varphi\\ z=c\cos\theta\end{cases},\qquad (\theta,\varphi)\in D=[0,\pi]\times[0,2\pi]$$

În cazul de față,

$$A^2+B^2+C^2=a^2b^2c^2\sin^2\theta\cdot\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)$$

iar

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}}$$

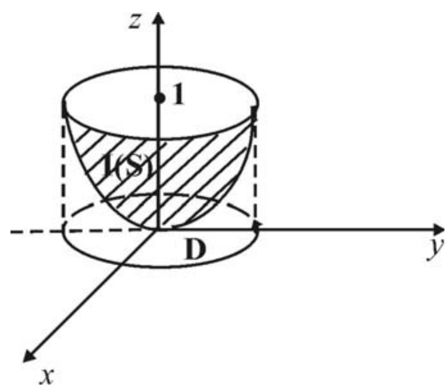
şi deci

$$I=abc\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)\sin\theta d\varphi=$$

$$= 8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

3) Să se determine masa unei suprafețe materiale de densitate $\rho(x,y,z)=|z|$ situată pe paraboloidul de ecuație $z=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$ pentru $0\le z\le 1$



$$M=\iint_S \rho(x,y,z)d\sigma=\iint_S z d\sigma$$

Pentru S putem folosi reprezentarea parametrică

$$S=\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=\left(x^2+y^2\right)/2 \end{cases}, \quad (x,y)\in D$$

unde $D=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \middle| x^2+y^2\le 2\right\}$

$$M=\iint_S z d\sigma=\iint_D \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+p^2+q^2}dxdy=$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D \left(x^2+y^2\right)\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

Pentru calculul acestei integrale duble folosim coordonatele polare

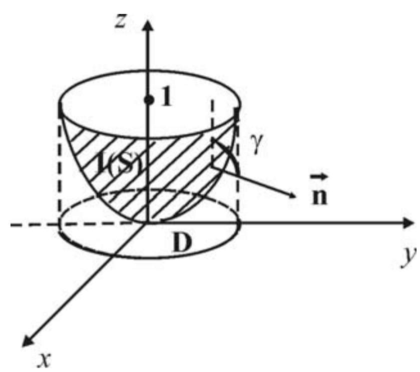
$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta & r \in \left[0,\sqrt{2}\right] \\ y = r\sin\theta & \theta \in \left[0,2\pi\right] \end{cases}$$

$$M = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr = \pi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\sqrt{1+r^2}\,dr = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{2}{15}\right)\pi$$

4) Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S xzdydz + yzdxdz + \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

unde S este fața inferioară față de planul (XOY) a paraboloidului $z = x^2 + y^2$ cu $0 \le z \le 1$



Pentru suprafață S alegem reprezentarea parametrică:

$$S = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}, \qquad (x,y) \in D$$

unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 1\right\}$

Cum $\gamma > \frac{\pi}{2}$, deci $\cos\gamma < 0$, pentru calculul componentelor normalei la suprafață folosim formulele:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\beta = \dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ \cos\gamma = \dfrac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases}$$

şi obținem:

$$\cos\alpha = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};\ \cos\beta = \frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Atunci

$$I = \iint_S \left(2x^2z + 2y^2z - x^2 - y^2\right)\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, d\sigma =$$

$$= \iint_D \left(x^2+y^2\right)\left(2x^2+2y^2+1\right)dxdy$$

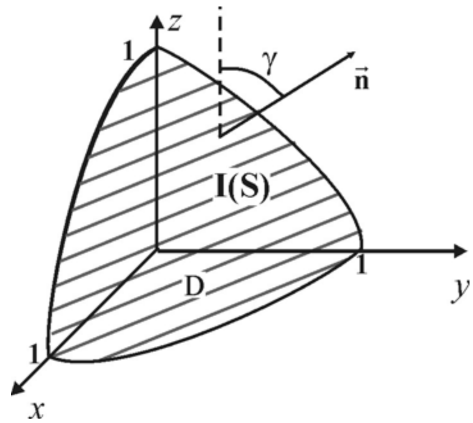
$$D: \begin{cases} x = r\cos\theta & r \in [0,1] \\ y = r\sin\theta & \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3\left(2r^2-1\right)dr = \frac{\pi}{6}$$

5) Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S xyz\left(xdydz + ydxdz + zdxdy\right)$$

unde S este fața superioară față de planul (XOY) a trunghiului sferic din primul octant situat pe sfera $x^2+y^2+z^2=1$



Pentru S folosim reprezentarea parametrică

$$S = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases} \qquad (x, y) \in D$$

unde D este sfertul de disc definit prin:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0 \right\}$$

Cum $\gamma < \dfrac{\pi}{2}$, rezultă $\cos\gamma > 0$, deci

$$\cos\gamma = \frac{-1}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{p}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = x$$

$$\cos\beta = \frac{q}{-\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = y$$

Atunci

$$I = \iint_S \left(x^3yz + xy^3z + xyz^2\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) d\sigma =$$

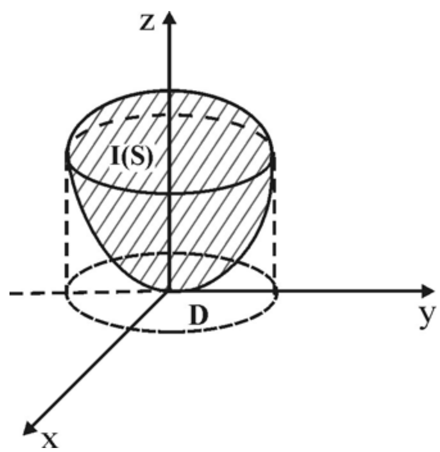
$$= \iint_D \left[x^3y + xy^3 + xy\left(1 - x^2 - y^2\right) \right] dxdy =$$

$$= \iint_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{8}$$

6) Folosind formula Gauss Ostrogradski, să se calculeze integrala:

$$I = \iint_S x^3y^2dydz + x^2y^3dxdz + 3zdxdy$$

unde S este frontiera domeniului mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$ şi $z = 6 - x^2 - y^2$ cu $0 \le z \le 6$



$$\vec{F}(x, y, z) = x^3y^2\vec{i} + x^2y^3\vec{j} + 3z\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3 = 6x^2y^2 + 3$$

$$I = 3\iiint_\Omega (2x^2y^2 + 1)dxdydz$$

Ω poate fi reprezentat ca domeniu simplu față de axa OZ.

$$\Omega : \begin{cases} (x, y) \in D \\ z \in [x^2 + y^2, 6 - x^2 - y^2] \end{cases}$$

unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 3\}$

Atunci:

$$I = 3\iint_D (2x^2y^2 + 1)(6 - 2x^2 - 2y^2)dxdy$$

Pentru calculul acestei integrale duble putem folosi coordonatele polare

$$D:\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \qquad \begin{matrix} r \in [0,\sqrt{3}] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{matrix}$$

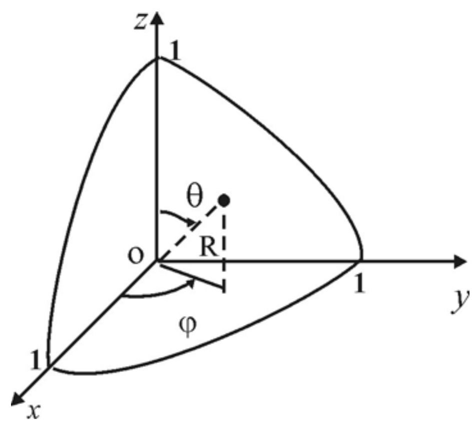
$$I = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(2r^4 \sin^2\theta\cos^2\theta + 1\right)\left(6 - 2r^2\right) r\,dr =$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(6r^5 - 2r^7\right)dr + 6\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(6r - 2r^3\right) = \frac{297\pi}{8}$$

7) Folosind formula Gauss – Ostrogradski să se calculeze integrala:

$$I = \iint_S x^3 dydz + x^2 ydxdz + x^2 zdxdy$$

unde S este frontiera unui domeniu din $\mathbb{R}^3$ delimitat de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şi planele de coordonate $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (pentru $x, y, z \geq 0$)



În cazul de faţă:

$$\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + x^2 y\vec{j} + x^2 z\vec{k}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = 2x + 2x + 2x = 6x$$

Rezultă că

$$I = 6\iiint_\Omega x\,dxdydz$$

Pentru calculul acestei integrale triple folosim coordonatele sferice

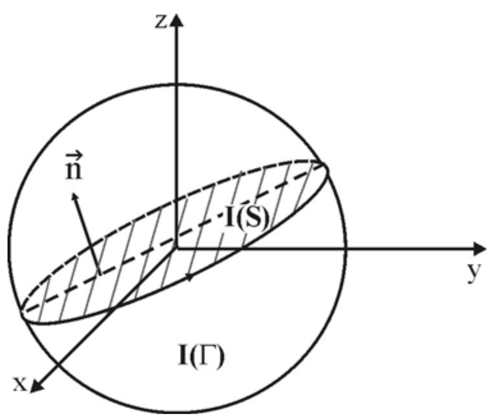
$$\Omega:\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi & r\in[0,1] \\ y = r\sin\theta\sin\varphi\ , & \theta\in[0,\pi/2] \\ z = r\cos\theta & \varphi\in[0,\pi/2] \end{cases}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{1}{3}$$

8) Folosind formula lui Stokes, să se calculeze integrala:

$$I = \int_\Gamma ydx + zdy + xdz$$

unde Γ este cercul situat la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu planul $x + y + z = 0$, parcurs în sens direct, privind din partea pozitivă a axei OX.



Deoarece $x + y + z = 0$ este ecuația unui plan ce trece prin origine, curba Γ va fi un cerc mare pe sfera de rază a. Ea este frontiera discului de rază a centrat în origine. Vom transforma integrala curbilinie într-o integrală de suprafață pe acest disc.

Vom folosi ecuația planului $x + y + z = 0$ pentru a calcula componentele normalei

$$z = -x - y$$

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -1;\ q = \frac{\partial z}{\partial y} = -1,\ \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{3}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{k}$$

În cazul de față,

$\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$

$\operatorname{rot}\vec{F} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

Atunci

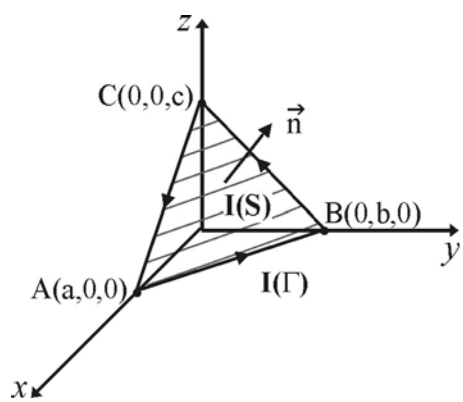
$I = -\frac{3}{\sqrt{3}}\iint\limits_{S} d\sigma = -\pi a^2\sqrt{3}$

deorece $\iint\limits_{S} d\sigma = \pi a^2$ (aria discului de rază a)

9) Folosind formula lui Stokes, să se calculeze integrala:

$I = \int\limits_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$

unde Γ este conturul triunghiului ale cărui vârfuri sunt în punctele $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ şi $C(0,0,c)$ (unde $a,b,c > 0$) parcurs în sensul ABCA



Integrala curbilinie o vom transforma în integrală de suprafață, unde S aparține planului ABC

Căutând ecuația acestul plan de forma $mx + ny + pz = 1$, obținem cu uşurință:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Această ecuație o folosim pentru determinarea componentelor normalei la suprafață, ținând seama de faptul că $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

$$z = c\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

$$p = -\frac{c}{a},\ q = -\frac{c}{b}$$

$$\sqrt{1 - p^2 - q^2} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}{ab}$$

$$\vec{n} = \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}\vec{i} + \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}\vec{j} + \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}\vec{k}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

Astfel obținem:

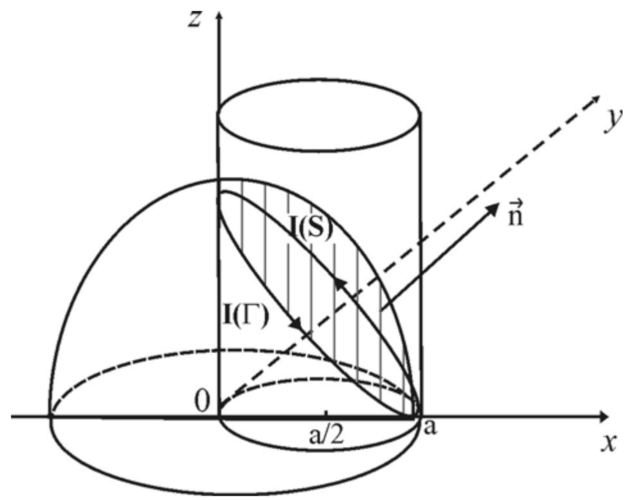
$$I = \frac{2(bc + ab + ab)}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}}\iint_S d\sigma = \frac{2(bc + ab + ab)}{ab}\iint_{AOB} dxdy = bc + ac + ab$$

deoarece $\iint_{AOB} dxdy = \text{aria}(\Delta AOB) = \frac{ab}{2}$

10) Folosind formula lui Stokes, să se calculeze

$$\int_\Gamma y^2dx + z^2dy + x^2dz$$

unde Γ este curba situată la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = ax$ (pentru $z \geq 0$)



Vom transforma integrala curbilinie într-o integrală de suprafață unde suprafață S este o porțiune de pe sferă. Vom folosi ecuația acesteia pentru determinarea componentelor normalei având totodată în vedere faptul că $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

$$p = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},\ q = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

Obținem:

$$\vec{n} = \frac{x}{a}\vec{i} + \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}\vec{k}$$

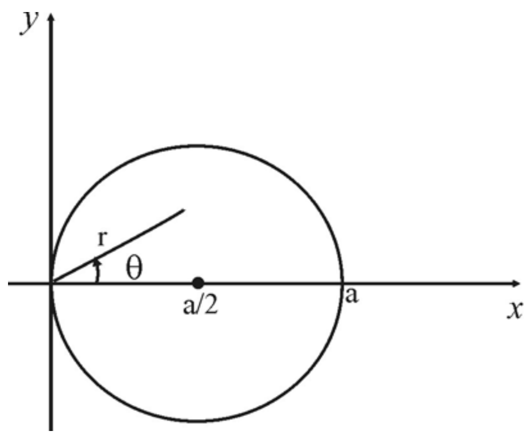
$$\vec{F}(x, y, z) = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$$

$$\text{rot}\vec{F} = -2z\vec{i} - 2x\vec{j} - 2y\vec{k}$$

Atunci:

$$I = -\frac{2}{a}\iint_S \left(xz + xy + y\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right)d\sigma = -2\iint_S \left[\frac{xy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + x + y\right]dxdy$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \le ax$ sau $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \le a^2$



Calculăm integrala dublă folosind coordonatele polare:

$$D: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \qquad \begin{array}{l} \theta \in [-\pi/2, \pi/2] \\ r \in [0, a\cos\theta] \end{array}$$

Se obține: $\quad I = -\dfrac{\pi a^3}{4}$